



量子の重ね合わせの不思議と 情報処理

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻

村尾美緒

人類の進化の歴史は、自然を制御する^{ツール}道具の進化の歴史...



火



照明・暖房・料理・武器

熱機関

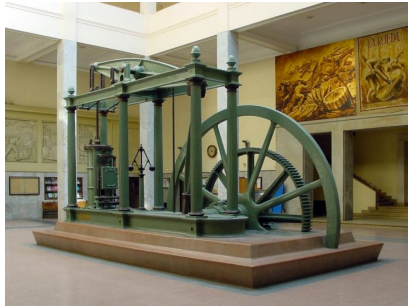


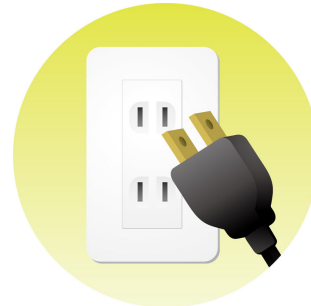
Photo by Nicolás Pérez - Watt steam engine

動力

人類の「器用さ」の度合いの進化ステージ

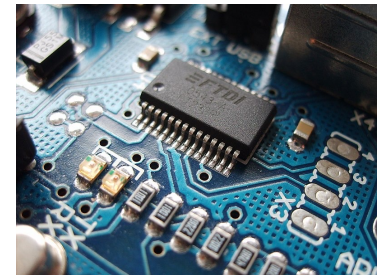
自然を受動的に受け入れるだけではなく、
能動的に自然を制御する新しい道具を発達させ、
さらにその新たな使い道を見つけ、
それによって生活が大きく変化してきた

電気



照明・動力・通信

エレクトロニクス



コンピュータ
→ 人工知能 (AI)

人類の進化の歴史は、自然を制御する^{ツール}道具の進化の歴史...



火



照明・暖房・料理・武器

熱機関

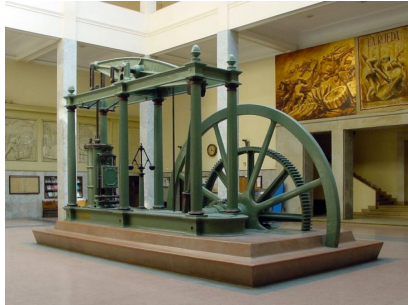


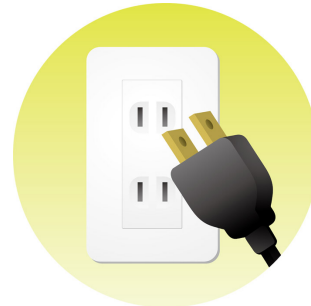
Photo by Nicolás Pérez - Watt steam engine

動力

人類の「器用さ」の度合いの進化ステージ

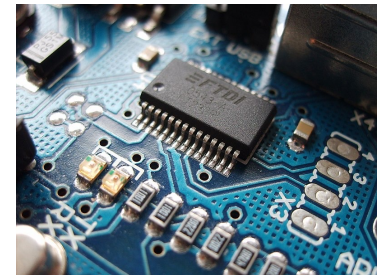
自然を受動的に受け入れるだけではなく、
能動的に自然を制御する新しい**道具**を発達させ、
さらにその**新たな使い道**を見つけ、
それによって生活が大きく変化してきた

電気



照明・動力・通信

エレクトロニクス



コンピュータ
→ 人工知能 (AI)

どのような制御まで実現可能かの限界は、
物理法則によって決められる

人類の進化の歴史は、自然を制御する^{ツール}道具の進化の歴史...



火



照明・暖房・料理・武器

熱機関

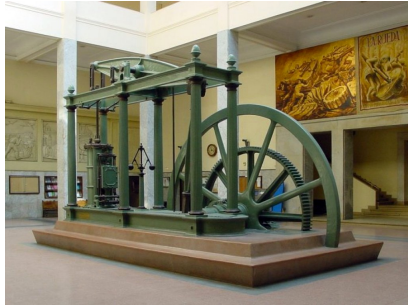


Photo by Nicolás Pérez - Watt steam engine

動力

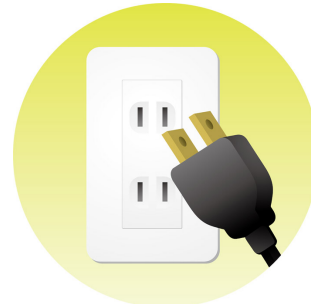
力学

熱力学

~~永久機関~~

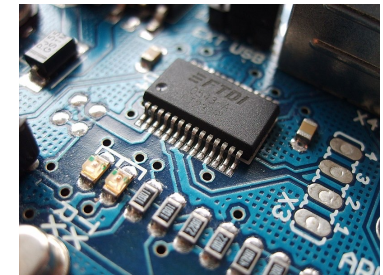
~~超光速~~

電気



照明・動力・通信

エレクトロニクス



コンピュータ
→ 人工知能 (AI)

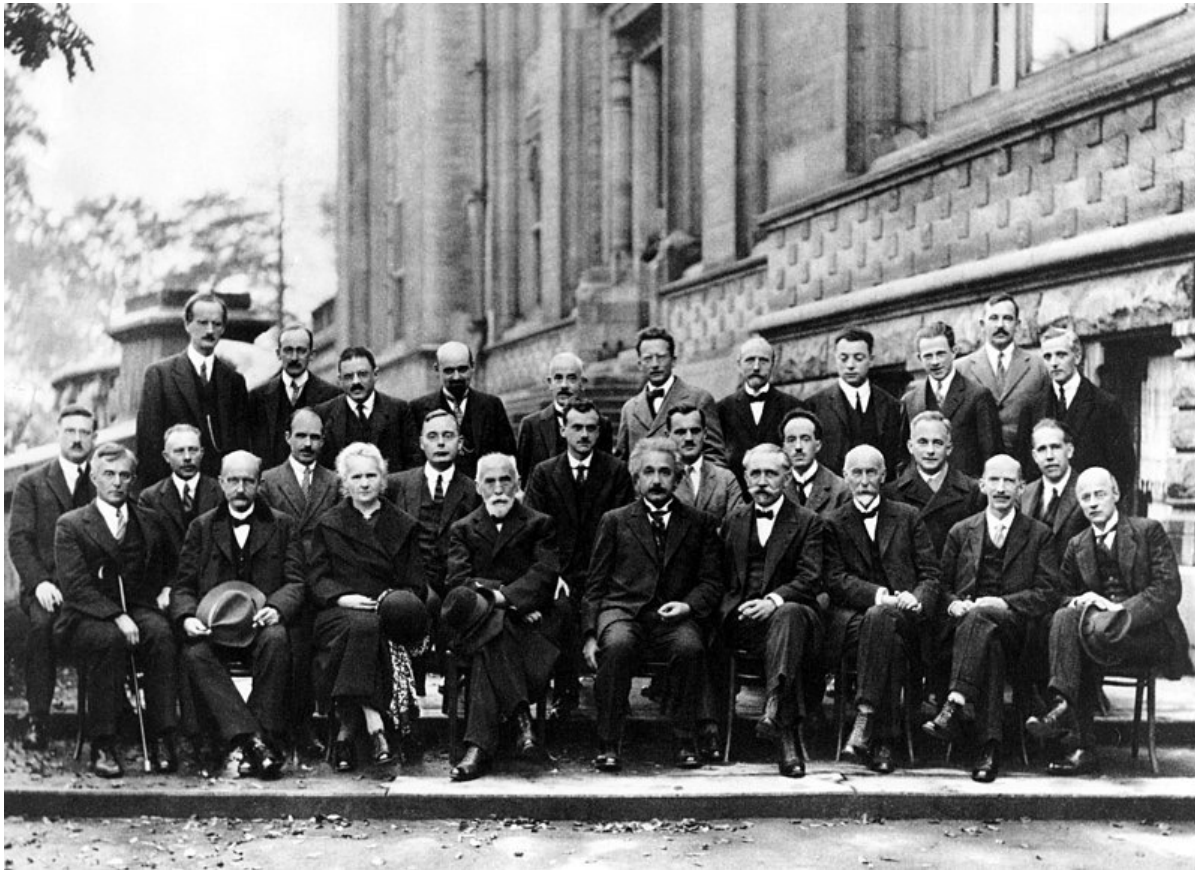
どのような制御まで実現可能かの限界は、
物理法則によって決められる

電磁気学

量子力学
1925年

量子力学誕生から約100年

■ 量子力学の基盤は1925年ごろに成立した



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Solvay_conference_1927.jpg#file

1927年のSolvay会議の写真

ハイゼンベルグ、シュレディンガー、ディラック、パウリ、キュリー夫人、ボルン、ボーア、プランク、そして、アインシュタインなどなど

量子力学創成期のオールスター集合写真

量子力学の発展によって、
人類は物理現象の理解を
深めた

物理系の量子力学

物理系の量子力学のルール

1. 物理系はその系のエネルギーを記述するハミルトニアンと呼ばれるエルミート行列 H で記述される。（無限次元系の場合は、エルミート演算子で表される。）
2. ハミルトニアン H で記述される物理系の純粋状態 $|\psi\rangle$ の時間発展は、次の方程式を満たす。
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad \text{シュレディンガー方程式（微分方程式）}$$
3. 物理系で観測可能な量をオブザーバブルと呼ぶ。オブザーバブルは、エルミート行列（またはエルミート演算子） O で記述される。ある純粋状態 $|\psi\rangle$ をオブザーバブル O について観測した際の期待値は $\langle \psi | O | \psi \rangle$ で与えられる。

注意：伝統的な物理では、波動関数 $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ を用いて物理系の純粋状態を記述することも多い。

基本的にこれらのルールのみから論理に従って
すべての量子物理現象を導くことができる。
今までに、量子力学に反する現象は
見つかっていない！



シュレディンガー
The Nobel Foundation

人類の進化の歴史は、自然を制御する^{ツール}道具の進化の歴史...

自然を受動的に受け入れるだけではなく、
能動的に自然を制御する新しい**道具**を発達させ、
さらにその**新たな使い道**を見つけ、
それによって生活が大きく変化してきた



火



照明・暖房・料理・武器

熱機関



Photo by Nicolás Pérez - Watt steam engine

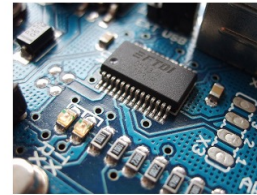
動力

電気



照明・動力・通信

エレクトロニクス



コンピュータ
→ 人工知能 (AI)

量子情報



量子ビット

量子コンピューター
量子センサー
量子通信



新ステージに到達したばかり

力学

熱力学

電磁気学

量子力学
1925年

~~永久機関~~

~~超光速~~

ここは同じ！

どのような制御まで実現可能かの限界は、
物理法則によって決められる

本講演では...

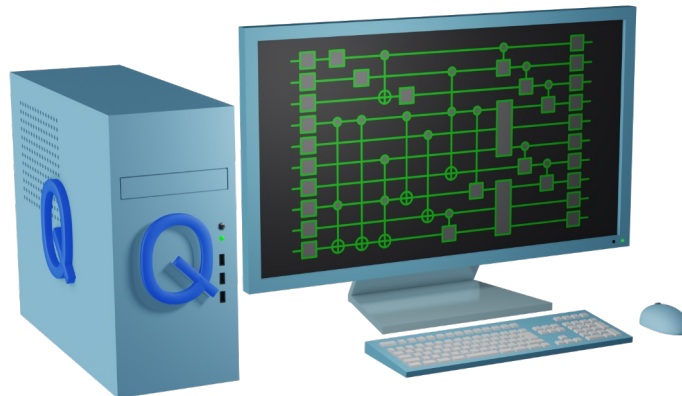
「量子力学100年とこれから」に関して、「これから」の発展の一つとして

量子情報 = 量子力学 + 情報処理

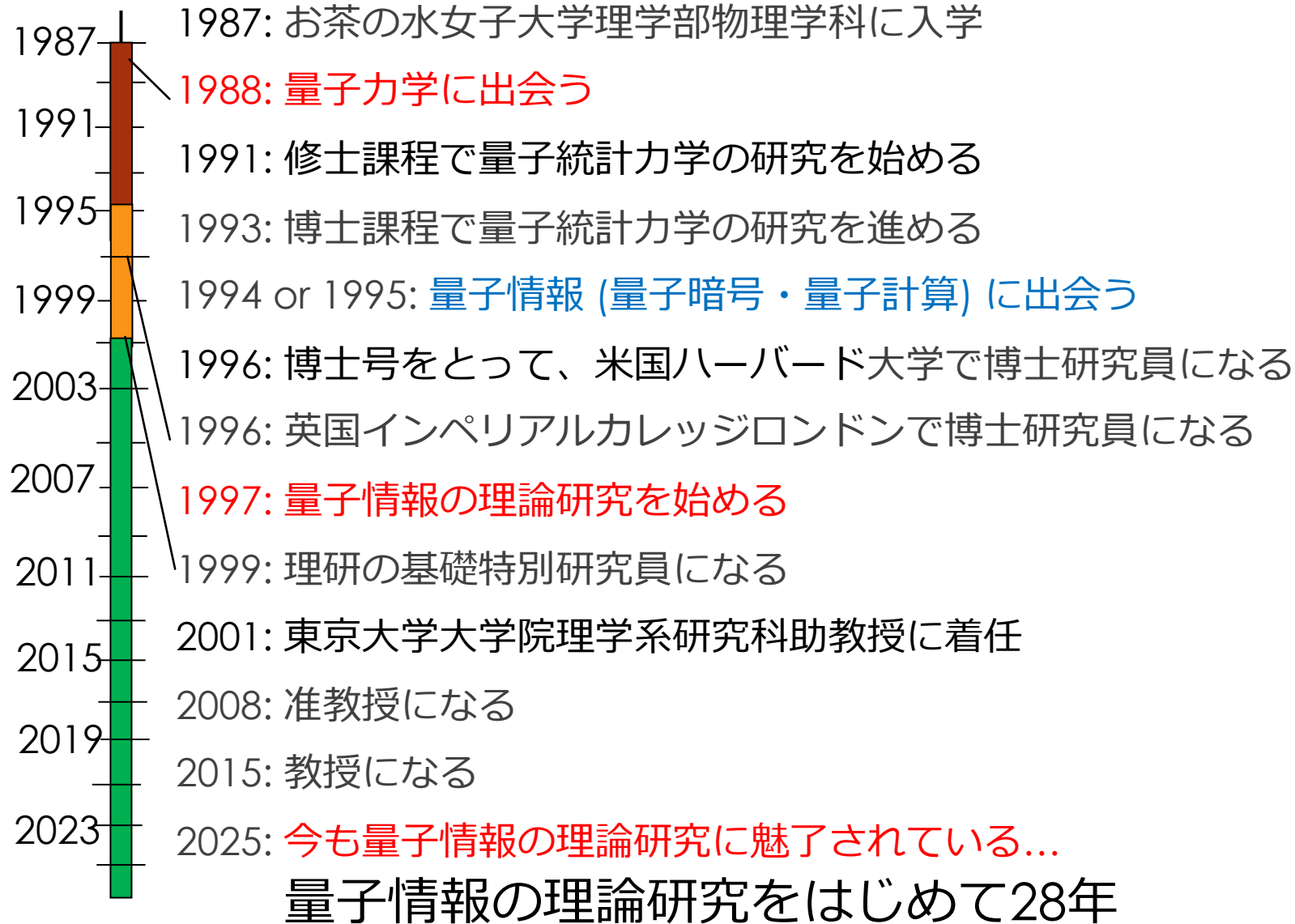
の観点から「**プログラマブルな**」**量子力学**の定式化と、その中で現れる

「**重ね合わせ**」が引き起こす**不思議**で非直感的な効果

「**重ね合わせ**」がつくりだす量子の世界での**新しいタイプの情報処理**
について、説明をいたします



本題の前に：自己紹介, 物理を初めて38年



1992



2001



2014



2023



本題にもどって

内容

1. 量子情報とプログラマブルな量子力学の定式化

■ プログラマブルな量子力学のミニコース

2. 量子の重ね合わせの不思議と情報処理

■ 状態の重ね合わせ

■ エンタングルメントとテレポーテーションの不思議

■ 高階量子計算における異なる因果順序の重ね合わせの不思議

■ ユニタリ反転と量子スイッチ

1. 量子情報と プログラマブルな量子力学の定式化

プログラマブルな量子力学のミニコース

本題にもどり

量子情報 = 量子力学 + 情報処理

普通の量子力学 = (主に) 自然に与えられている物理系を扱う



量子情報 = 量子力学 + 情報処理: 「プログラマブル」な量子力学の定式化

- 量子系を能動的にプログラミングする手法 (空間・時間のプログラミング)
- 情報処理:

入力から出力への変換(関数)、入力は定義域から選べる

変換は基本要素の組み合わせで構成できる (プログラマブル)



いろいろな変換を構成可能

量子力学の世界の入力とは？

量子力学の世界で実行可能な変換は？

→ 物理系によらない量子力学の枠組みがある

量子力学の公理的モデルの整備 (1930年代-1980年代ごろ)

Von Neumann 1932年

量子力学での仮定

1. 量子力学的な状態は、複素ヒルベルト空間のベクトルと同等。
2. 複数のシステムからなる系の量子力学的な状態は、ヒルベルト空間のテンソル積空間のベクトルと同等。
3. 量子力学的な状態の決定論的な変換はすべて完全正值トレース保存変換で表され、補助空間とユニタリ変換、トレースアウトを用いて実装できる。
Stinespring 1955年, Jamiołkowski 1972年, Choi 1975年, Kraus 1983年
4. 測定は完全正值変換の組で表され、測定によって量子力学的な状態は確率的に変化する。
1970年 Davis, Lewis, 小澤 1984年

かなり呪文ですが、後で説明しますので、わからなくてもひとまず気にしないでください。

物理系によらないプログラマブルな量子力学の定式化の枠組みは
1980年代までに整っていた

量子力学の公理的モデルの整備 (1930年代-1980年代ごろ)

Von Neumann 1932年

量子力学での仮定

1. 量子力学的な状態は、複素ヒルベルト空間のベクトルと同等。
2. 複数のシステムからなる系の量子力学的な状態は、ヒルベルト空間のテンソル積空間のベクトルと同等。
3. 量子力学的な状態の決定論的な変換はすべて完全正值トレース保存変換で表され、補助空間とユニタリ変換、トレースアウトを用いて実装できる。

これらの公理の「仮定」を駆使することで、
自然には存在し得ないような人工的な状況を考え、
量子力学の境において
新しい情報処理や新しい物理現象を
自在にプログラミングできる

→ 量子情報 = 量子力学 + 情報処理 の分野の成立

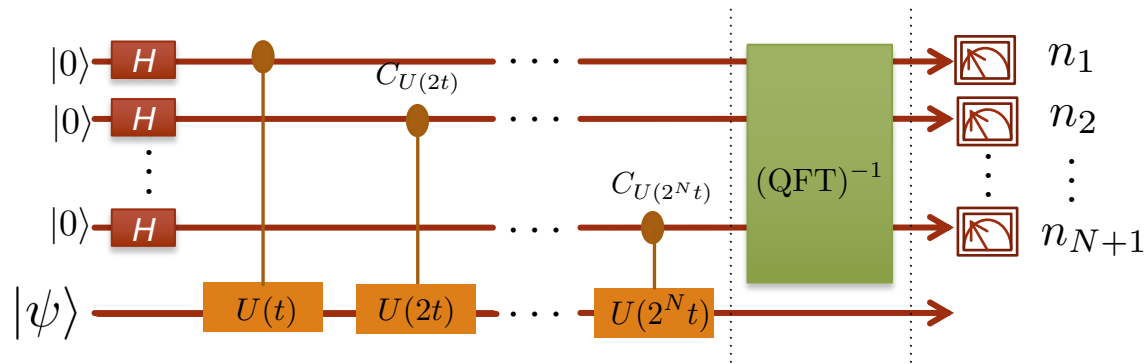
1983年
る。
1984年
い。

1994年ごろ： 量子コンピュータの因数分解アルゴリズムの発見

- アメリカの研究者Peter Shorが、量子コンピュータを用いると、古典計算機では計算が困難な因数分解のアルゴリズムを効率的(多項式時間で)に計算できることを発見
- 因数分解をする際に古典計算機で時間のかかる(現在知られている最良のアルゴリズムでも準指数的時間がかかる)位数発見で周期関数の周期を求める部分を、重ね合わせ状態の性質をうまく使う量子コンピュータのアルゴリズム「量子位相推定」の性質を使って行うことで、多項式時間で実行



<https://math.mit.edu/~shor/>



量子位相推定アルゴリズム

公開鍵暗号システムのRSA暗号などでは、その安全性が因数分解の計算が困難なことに依存していたため、暗号が破られてしまう！

プログラマブルな量子力学の定式化

入力状態 $\vec{x}$

変換 f

出力状態 $f(\vec{x})$

呪文のようですが

量子力学での仮定

1. 量子力学的な状態は、複素ヒルベルト空間のベクトルと同等。→ 重ね合わせ状態
2. 複数のシステムからなる系の量子力学的な状態は、ヒルベルト空間のテンソル積空間のベクトルと同等。→ エンタングルメント（量子もつれ）の存在
3. 量子力学的な状態の決定論的な変換はすべて完全正值トレース保存変換で表され、補助空間とユニタリ変換、トレースアウトを用いて実装できる。→ 変換のプログラミング可能性
4. 測定は完全正值変換の組で表され、測定によって量子力学的な状態は確率的に変化する。→ 量子測定（確率的変換）のプログラミング可能性

1. 重ね合わせ状態

3. ユニタリ時間発展

2. エンタングルメント

4. 量子測定

量子力学的状態の特徴

入力・出力
【量子データ】

量子力学的変換の特徴

プログラミング可能性
【情報処理】

まずは呪文を解読してみましよう

プログラマブルな量子力学の定式化 ミニコース

ここではできるだけブラケット表示を使わず進めていきます

プログラマブルな量子力学の定式化

入力状態 $\vec{x}$

変換 f

出力状態 $f(\vec{x})$

量子力学での仮定

1. 量子力学的な状態は、複素ヒルベルト空間のベクトルと同等。→ **重ね合わせ状態**
2. 複数のシステムからなる系の量子力学的な状態は、ヒルベルト空間のテンソル積空間のベクトルと同等。→ **エンタングルメント（量子もつれ）の存在**
3. 量子力学的な状態の決定論的な変換はすべて完全正值トレース保存変換で表され、補助空間とユニタリ変換、トレースアウトを用いて実装できる。→ **変換のプログラミング可能性**
4. 測定は完全正值変換の組で表され、測定によって量子力学的な状態は確率的に変化する。
→ **量子測定（確率的変換）のプログラミング可能性**

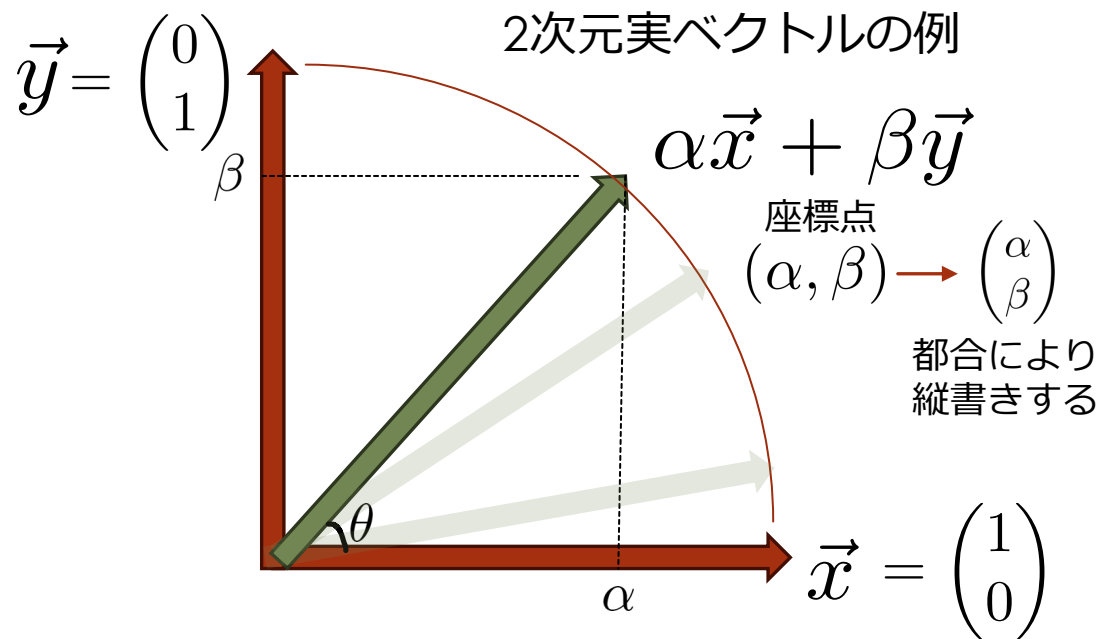
1. 重ね合わせ状態

量子力学的状態の特徴

入力・出力
【量子データ】

ウォームアップ：2次元実ベクトル(まだ量子ではない)

➡ 複数：ベクトルの重ね合わせ（合成）



ベクトル：長さとし向きを持つ矢印

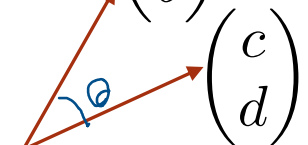
ベクトルの長さ： $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

ベクトルの向きは、 x 軸からの角度 θ で表せる

ベクトルの足し算
(線形和)

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

内積：2つのベクトルの“近さ”を測る

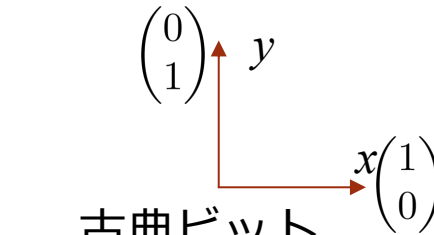
$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \cos \theta$$


最も簡単な量子ビット系の表示 (ベクトル表示)

古典ビット (通常の0,1の二進数)をベクトルで表してみる

$$0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

縦書きでベクトルを表しているが、
1番目のエントリーがx座標、
2番目のエントリーがy座標みたい
なものだと思って良い。



ここでは直
交するベク
トルの組を
“座標系”と
呼んでみる

ベクトルの方向：縦か横のみ

量子ビット

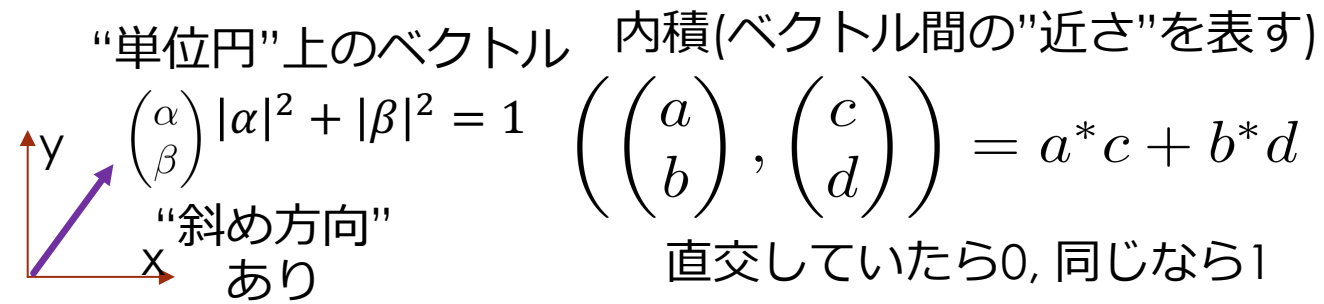
*複素ヒルベルト空間= 内積が定義できて完備な複素ベクトル空間

呪文1: 量子力学的な状態は、**複素ヒルベルト空間*のベクトル**と同等

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

長さ1のベクトル
重ね合わせ状態

α, β は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす**複素数**なんでもOK
規格化条件



ただし、これは**直交性に注目したイメージ図**。量子ビットを表す2次元複素ベクトルは、本当は2次元平面では表せない。球面上のベクトルとして表すことができ、ブロッホベクトルと呼ばれる。ただしこの場合、直交は90度ではない

重ね合わせに関する注意

量子ビットの状態 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\phi} = |\phi\rangle$ ブラケット表示

$\alpha, \beta \neq 0, 1$ のとき、 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ の"座標系"(基底)での重ね合わせ状態という重ね合わせ状態かどうかは、とる"座標系" (基底)によることに注意！

- ➡ 重ね合わせ状態は、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ でも、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ でもない状態
 - ∴ 測定前は、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ でも $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ でもない。測定結果は、測定による変化後の状態
- しかし、
- ➡ 重ね合わせ状態を、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり同時に $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ でもある状態というのは正しくない。
↑
この言い方は一般向けの説明でよく使われるが、正しくないので注意！

プログラマブルな量子力学の定式化

入力状態 $\vec{x}$

変換 f

出力状態 $f(\vec{x})$

量子力学での仮定

1. 量子力学的な状態は、複素ヒルベルト空間のベクトルと同等。→ **重ね合わせ状態**
2. 複数のシステムからなる系の量子力学的な状態は、ヒルベルト空間の**テンソル積空間**のベクトルと同等。→ **エンタングルメント（量子もつれ）の存在**
3. 量子力学的な状態の決定論的な変換はすべて完全正值トレース保存変換で表され、補助空間とユニタリ変換、トレースアウトを用いて実装できる。→ **変換のプログラミング可能性**
4. 測定は完全正值変換の組で表され、測定によって量子力学的な状態は確率的に変化する。→ **量子測定（確率的変換）のプログラミング可能性**

量子力学的状態の特徴

入力・出力
【量子データ】

2. エンタングルメント

Einstein-Podolsky-Rosen; Schrödinger 1935年

量子ビットが二つある場合

呪文2: 複数のシステムからなる量子力学的な状態は、ヒルベルト空間の**テンソル積空間**のベクトルと同等

➡ 2つの2次元複素ベクトルのテンソル積→4次元複素ベクトル

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} & \otimes & \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\ \beta_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \alpha_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix} \\ \text{2次元} & & \text{2次元} & & & & & & \text{4次元} \\ \text{複素} & & \text{複素} & & & & & & \text{複素} \\ \text{ベクトル} & & \text{ベクトル} & & & & & & \text{ベクトル} \end{array}$$



*ただし規格化条件を満たす必要あり
さらに、自由な重ね合わせ状態も許されるため、4次元ベクトルの複素変数を自由*にとれる
量子ビットが n 個あると 2^n 次元のベクトルになる

$$\begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix}$$

➡ 4次元ベクトルで表される状態には、テンソル積に分解できない重ね合わせ状態がある→この状態が**エンタングルメントを持つ状態**（**エンタングル状態**）

古典力学では、そもそも重ね合わせ状態は許されないので、エンタングルメントを持つ状態は許されない。

2つの量子ビットのエンタングル状態の例

量子ビットAと量子ビットBのエンタングルメントを持つ状態の例

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

量子ビットA

量子ビットB

- この状態は、量子ビットAと量子ビットBが違いに直交する状態のテンソル積状態の重ね合わせ状態

重ね合わせない時のテンソル積の状態はエンタングル状態ではない

- ベクトルとテンソル積のルールに従って計算すると右辺を得る

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\ \beta_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \alpha_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix}$$

ベクトルの和のルール

テンソル積のルール

2つの量子ビットのエンタングル状態

2つの量子ビットのエンタングル状態

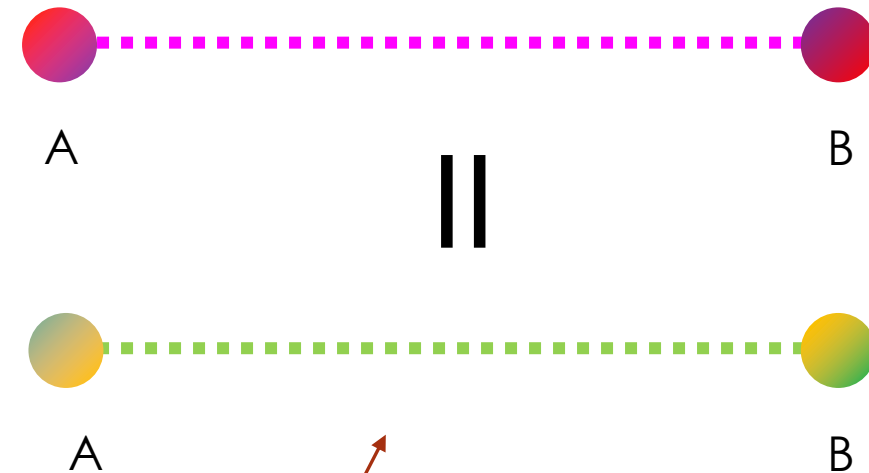
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1つ目の量子ビットAと2つ目の量子ビットBが
違いに異なる状態のテンソル積状態の重ね合わせ状態

このエンタングル状態は、別の表し方がある

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\beta^* \\ \alpha^* \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\beta^* \\ \alpha^* \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ に注意して、ベクトルの和とテンソル積
のルールに従って計算すると同じベクトルになる



同じ状態の違うテンソル積の重ね合わせ状態でも、無限に違う表し方がある！

“座標”（基底）の取り方次第で

プログラマブルな量子力学の定式化

入力状態 $\vec{x}$

変換 f

出力状態 $f(\vec{x})$

量子力学での仮定

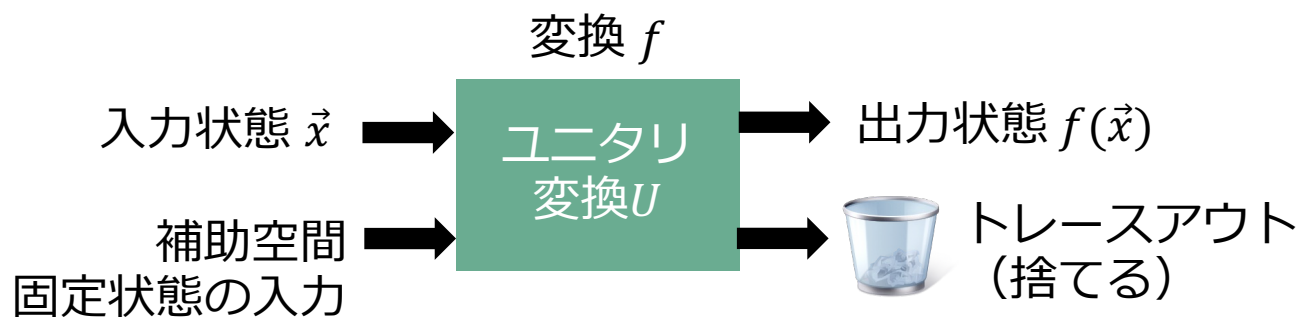
1. 量子力学的な状態は、複素ヒルベルト空間のベクトルと同等。→ **重ね合わせ状態**
2. 複数のシステムからなる系の量子力学的な状態は、ヒルベルト空間のテンソル積空間のベクトルと同等。→ **エンタングルメント（量子もつれ）の存在**
3. 量子力学的な状態の決定論的な変換はすべて**完全正值トレース保存変換**で表され、**補助空間とユニタリ変換、トレースアウト**を用いて実装できる。→ **変換のプログラミング可能性**
4. 測定は完全正值変換の組で表され、測定によって量子力学的な状態は確率的に変化する。
→ **量子測定（確率的変換）のプログラミング可能性**

3. ユニタリ変換

量子力学的変換の特徴
プログラミング可能性
【情報処理】

量子ビットの変換：プログラム可能性

呪文3: 量子力学的な状態の決定論的な変換はすべて**完全正値トレース保存変換**で表され、**補助空間とユニタリ変換、トレースアウト**を用いて実装できる

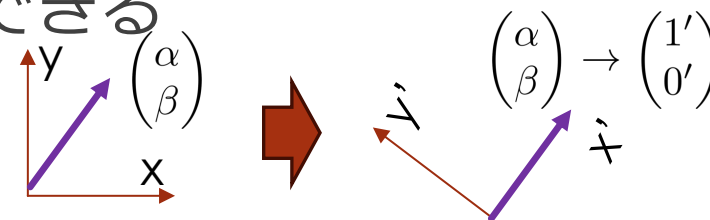


➡ 量子ビットの可逆な変換は、ユニタリ変換*と呼ばれる特別な変換

➡ ユニタリ変換は**“座標系”(基底)の変換(“回転”)**と解釈できる

*同じ次元のベクトルからベクトルへの線形変換のうち、異なるベクトル間の“近さ”（内積）を変えない変換がユニタリ変換

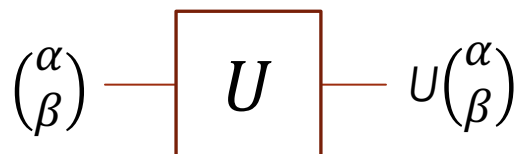
行列で表される線形変換のうち特別なもの



ユニタリ変換のプログラミング

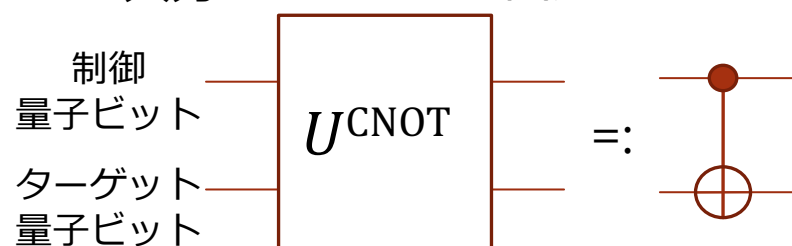
- 任意の多量子ビットへのユニタリ変換は、1量子ビットの量子ゲートと2量子ビットの量子ゲート（基本ゲートと呼ぶ）の組み合わせでプログラミングできる

入力 → 出力



1量子ビットの量子ゲート

入力 → 出力



2量子ビットの量子ゲート

「なにもしないゲート」と「反転ゲート」のある種の『重ね合わせ』

補足 ユニタリ変換はユニタリ行列で表現できる

量子ビットの場合：

ベクトルの変換の仕方を記述する"記号"

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ただし、 } UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I} \quad \dagger(\text{ダガー})\text{は、(有限次元の場合は)転置Tと複素共役化*の合成変換}$$

すなわち $U^\dagger = U^{-1}$ を満たすものがユニタリ行列

プログラマブルな量子力学の定式化

入力 x

変換 f

出力 $f(x)$

量子力学での仮定

1. 量子力学的な状態は、複素ヒルベルト空間のベクトルと同等。→ **重ね合わせ状態**
2. 複数のシステムからなる系の量子力学的な状態は、ヒルベルト空間のテンソル積空間のベクトルと同等。→ **エンタングルメント（量子もつれ）の存在**
3. 量子力学的な状態の決定論的な変換はすべて完全正值トレース保存変換で表され、補助空間とユニタリ変換、トレースアウトを用いて実装できる。→ **変換のプログラミング可能性**
4. 測定は**完全正值変換の組**で表され、測定によって量子力学的な状態は確率的に変化する。
→ **量子測定（確率的変換）のプログラミング可能性**

4. 量子測定

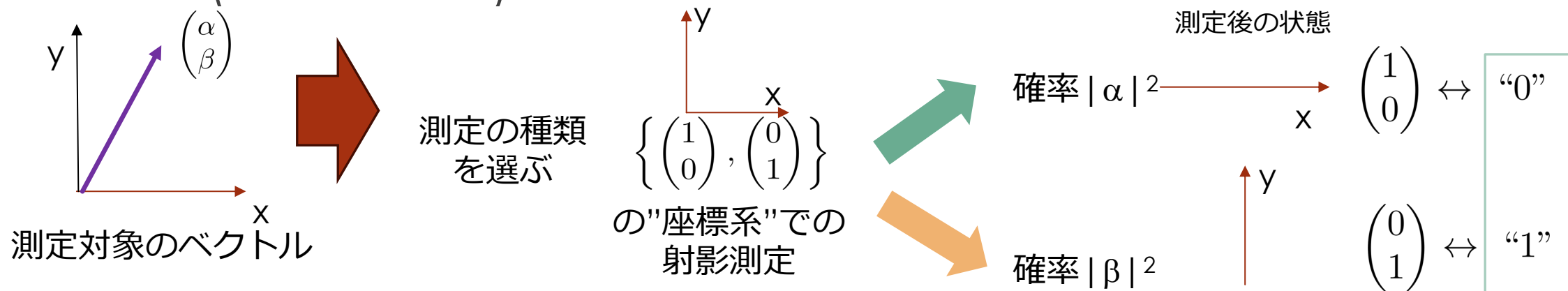
量子力学的変換の特徴
プログラミング可能性
【情報処理】

量子ビットへの射影測定（測定は確率的な変換）

呪文4: 測定は**完全正值変換の組**で表され、測定によって量子力学的な状態は**確率的に変化**する

特に物理量に対応する**射影測定**では、選んだ“座標系”(基底)を構成する直交するベクトル(基底ベクトル)のいずれかに射影される

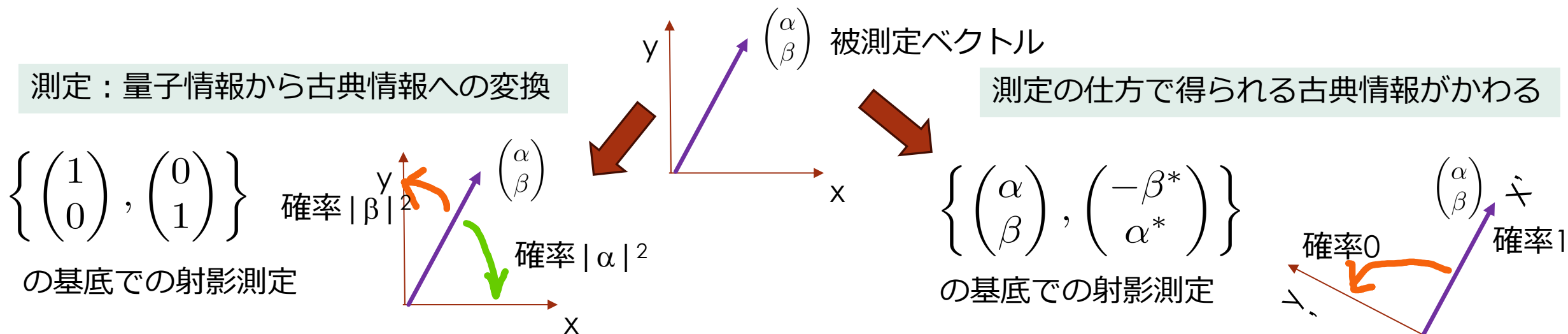
- 測定値はどの基底ベクトルに射影されたかを古典ビットで出力
- どの基底ベクトルに射影されるかは、測定対象のベクトルと基底ベクトルとの内積(ある種の距離)の絶対値自乗で与えられる確率で確率的に変化



量子ビットへの射影測定（色々な測定基底）

物理量に対応する**射影測定**では、選んだ“座標系”(基底)を構成する直交するベクトル(基底ベクトル)のいずれかに射影される

- 測定値はどの基底ベクトルに射影されたかを古典ビットで出力
- どの基底ベクトルに射影されるかは、測定対象のベクトルと基底ベクトルとの内積(ある種の距離)の絶対値自乗で与えられる確率で確率的に変化



いろいろな測定基底(“座標系”)が選べるところも量子力学の重要ポイント！

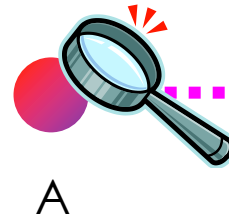
2. 重ね合わせの不思議と情報処理

状態の重ね合わせ：エンタングルメントと量子テレポーテーションの不思議

量子力学のルールに従って エンタングル状態の片方を測定すると...

量子ビットAと量子ビットBのエンタングル状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Bには触っていないが
瞬時に変化

➡ 量子ビットAを $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ の基底で射影測定する

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

確率1/2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

確率1/2 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



A

エンタングルメント
は消滅



B



A

エンタングルメント
は消滅



B

片方の量子ビットに測定をすると、
もう片方の量子ビットの状態が測定結果に応じて瞬時に変化する!

量子力学のルールに従って エンタングル状態の片方を測定すると...

量子ビットAと量子ビットBのエンタングル状態（別の表し方）

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta^* \\ -\alpha^* \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \beta^* \\ -\alpha^* \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Bには触っていないが
瞬時に変化

➡ 量子ビットAを $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta^* \\ -\alpha^* \end{pmatrix} \right\}$ の基底で射影測定する

量子ビットA 量子ビットA

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta^* \\ -\alpha^* \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \beta^* \\ -\alpha^* \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ をみたすなら
どの複素数を選んでも良い

確率1/2

確率1/2

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta^* \\ -\alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta^* \\ -|\alpha|^2 \\ |\beta|^2 \\ -\beta\alpha^* \end{pmatrix}$$



A

エンタングルメント
は消滅



B

$$\begin{pmatrix} \beta^* \\ -\alpha^* \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta^* \\ |\beta|^2 \\ -|\alpha|^2 \\ -\beta\alpha^* \end{pmatrix}$$



A

エンタングルメント
は消滅



B

片方の量子ビットに測定をすると、もう片方の量子ビットが**測定方法に応じて別の状態に瞬時に変化**する! Spooky action at a distance! (Einstein)

光速を超えて情報が伝達???

はしない

- 二つの量子ビットを思い切り離して片方の量子ビットを測定しても、測定に応じて他方の量子ビットが瞬時に変化する
- これは光速を超えた情報の伝達???



The Nobel
Foundation

- 相対性理論に反する???
- 状態は測定で瞬時に変化するが、測定結果をコントロールできず、ランダムに変化するだけで、情報は伝えられない（乱数の共有には使える）
- エンタングルメントを用いても、光速を超えた情報の伝達はできない
- 量子力学において「状態が変化すること」と「情報が伝わること」は異なる

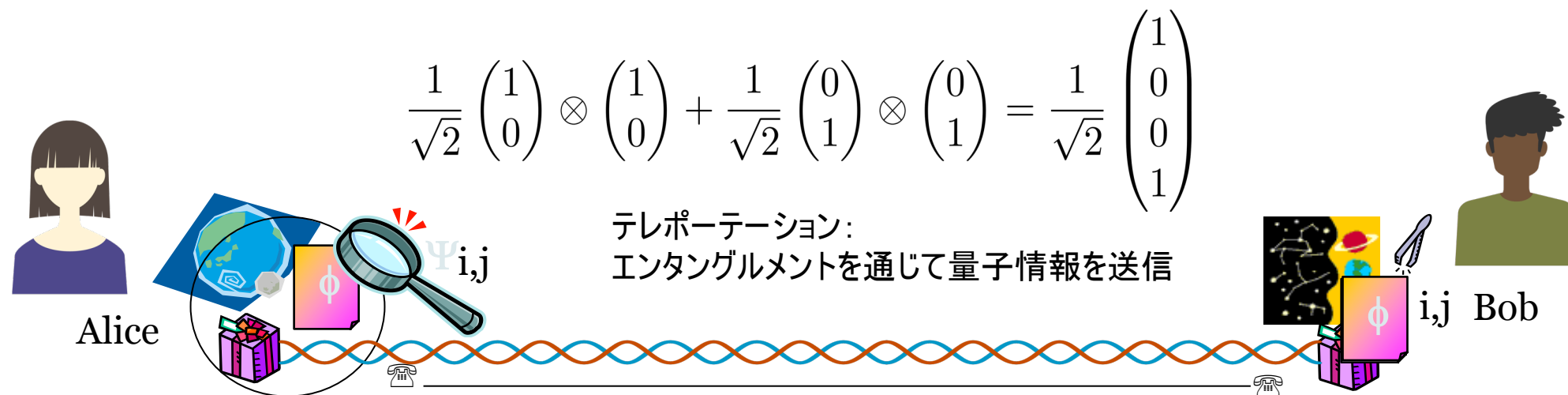
じゃあ、エンタングルメントは何の役に立つ？

量子テレポーテーション

タスク：未知の量子ビットの状態の情報のみを送る

未知の量子ビットの状態：1回の測定で正確に状態を知ることはできない

量子測定をうまく用いることで、物理的な粒子（光や原子）を送らずに、未知の量子ビットの状態の**情報のみ**を**未知のまま**で伝達する



量子コンピュータのパーツとしても使われる(離れた量子ビット間での計算)

Theory: C.H. Bennett et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993)

Experiment: Zeilinger and de Martini groups (1997), Kimble's group (1998), Wineland and Blatt groups (2004)

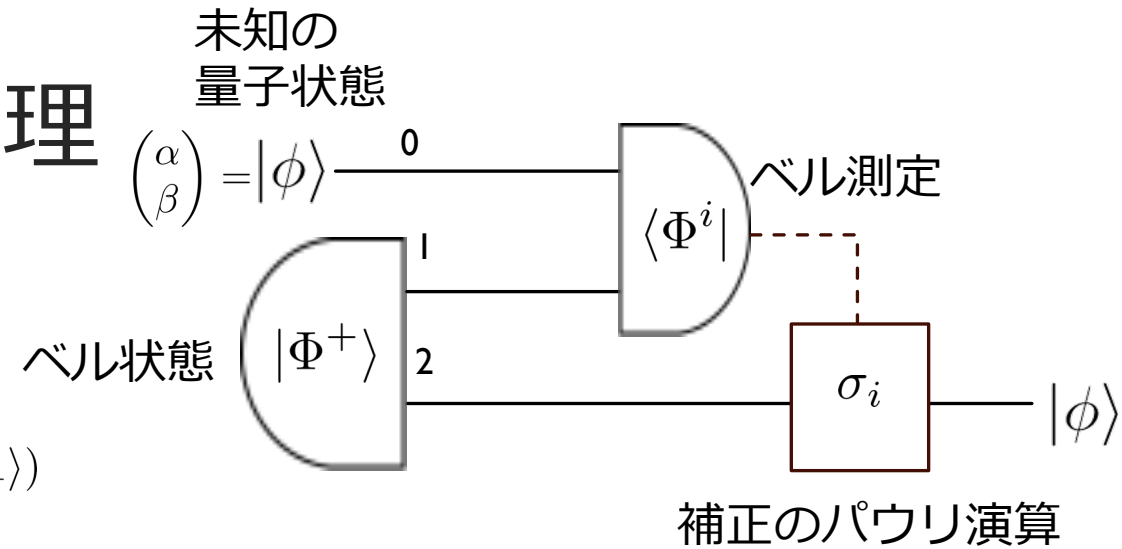
量子テレポーテーションの原理

- エンタングル状態を**資源**として用いる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$$

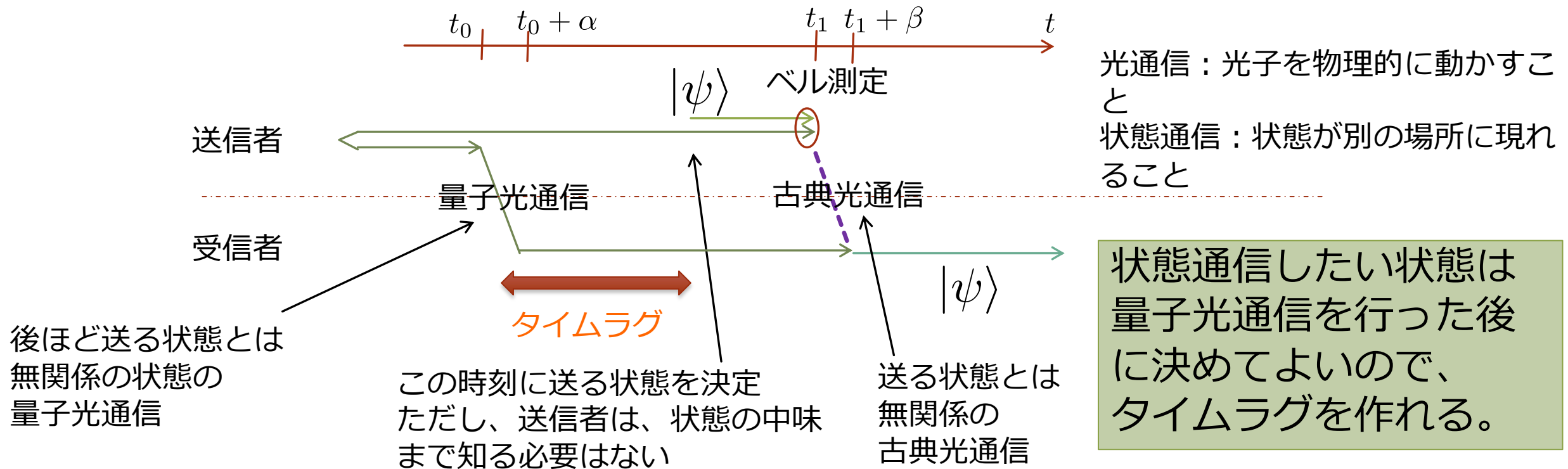
- 量子力学の基本原則に基づくと、未知量子状態とエンタングル状態の一方をエンタングル基底で測定すると、転送先にあるエンタングル状態の片割れが瞬時に変化。エンタングル基底での測定結果は未知量子状態に依存しない
- 測定結果は選べないので、結果に応じて転送先の状態に補正をかける。（補正をかけなくても良い場合もある。）
- エンタングルメントが完全であれば、外に情報が漏れない。

未知の量子状態を未知のまま送信者から受信者に送ることができる



テレポーテーションは因果関係を少々ごまかす と解釈することもできる

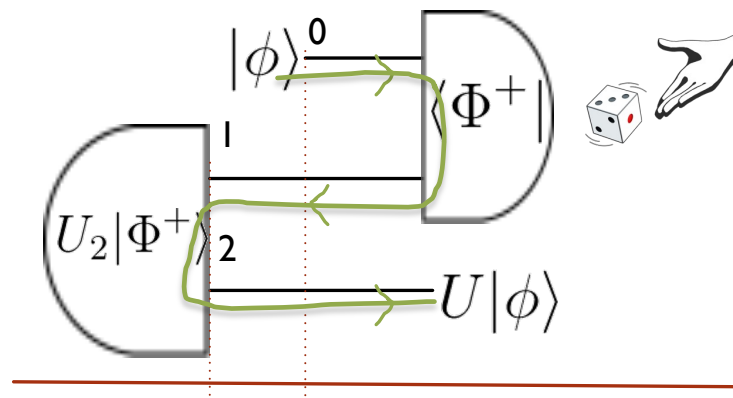
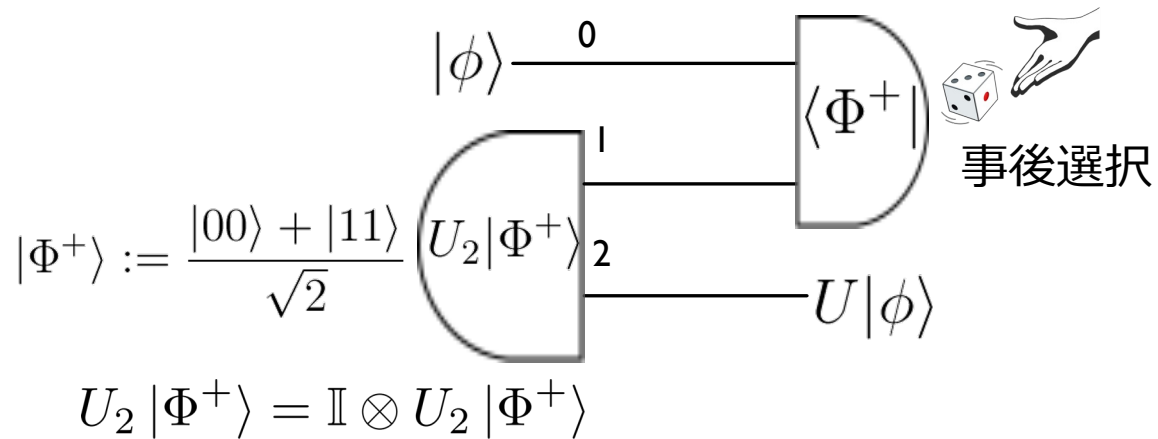
- テレポーテーションを実行するには、エンタングルした量子系の片方を送信者から受信者に予め送っておく必要がある。 $t = t_0$
- しばらく後に、送信者は、どんな量子情報を送るかを決めてベル測定し、測定結果を受信者に送る。 $t = t_1$



量子ゲートテレポーテーションは因果順序を少々ごまかす (確率的に)

■ 事後選択付きゲートテレポーテーション

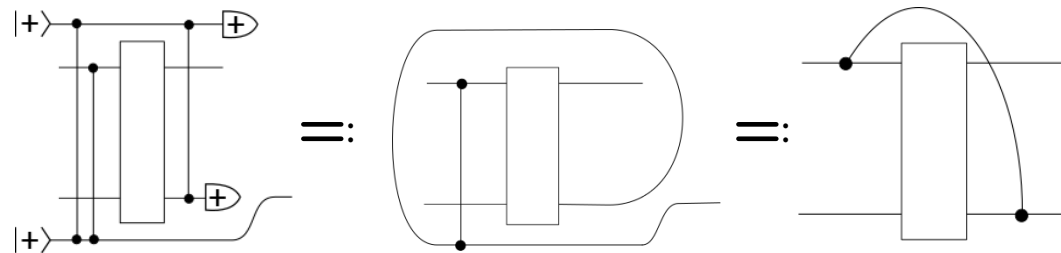
もし運良く、 $|\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|$ の結果を得ることができたら (1/4の確率で起きる)



確率的に
遅延入力
できる

演算をする時刻 < 演算対象を決めた時刻

より一般化すると



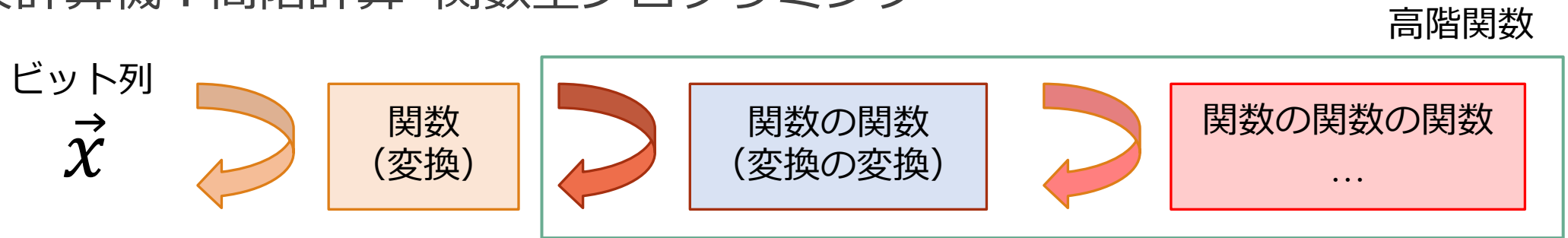
Closed time-like curve (CTC)
の非因果的操作の確率的実現モデル
(p-CTC)にもなっている!

2. 重ね合わせの不思議と情報処理

高階量子計算における異なる因果順序の重ね合わせの不思議

プログラマブルな量子力学の新たな発展 (高階量子計算)

■ 古典計算機：高階計算=関数型プログラミング



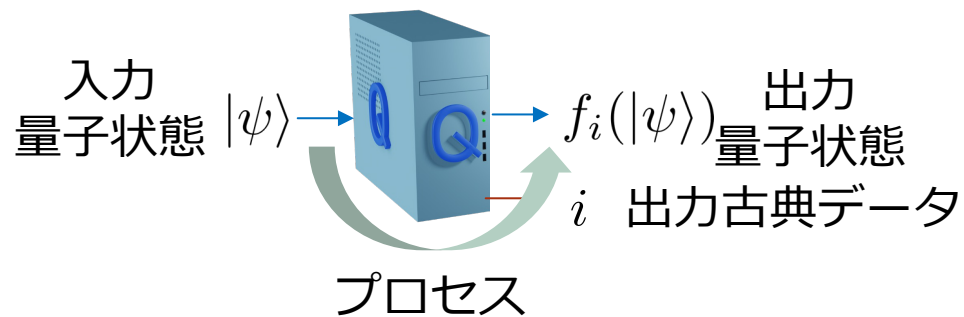
■ 高階量子計算・高階量子変換



高階量子計算

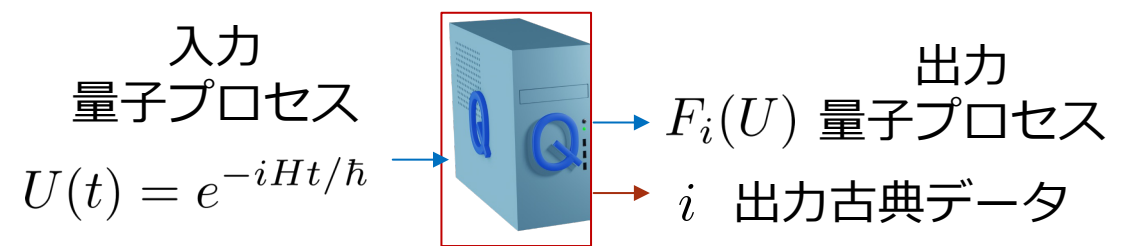
量子計算を高階量子計算の枠組みへと拡張することで、未知の量子系のダイナミクスを量子コンピュータで情報処理するための理論体系を考えることができる

通常の量子コンピューター
= 量子状態プロセッサ



f_i は量子状態(空間のみの関数)の変換

高階量子コンピューター
= 量子プロセスプロセッサ



F_i は量子プロセス(時間変化)の変換



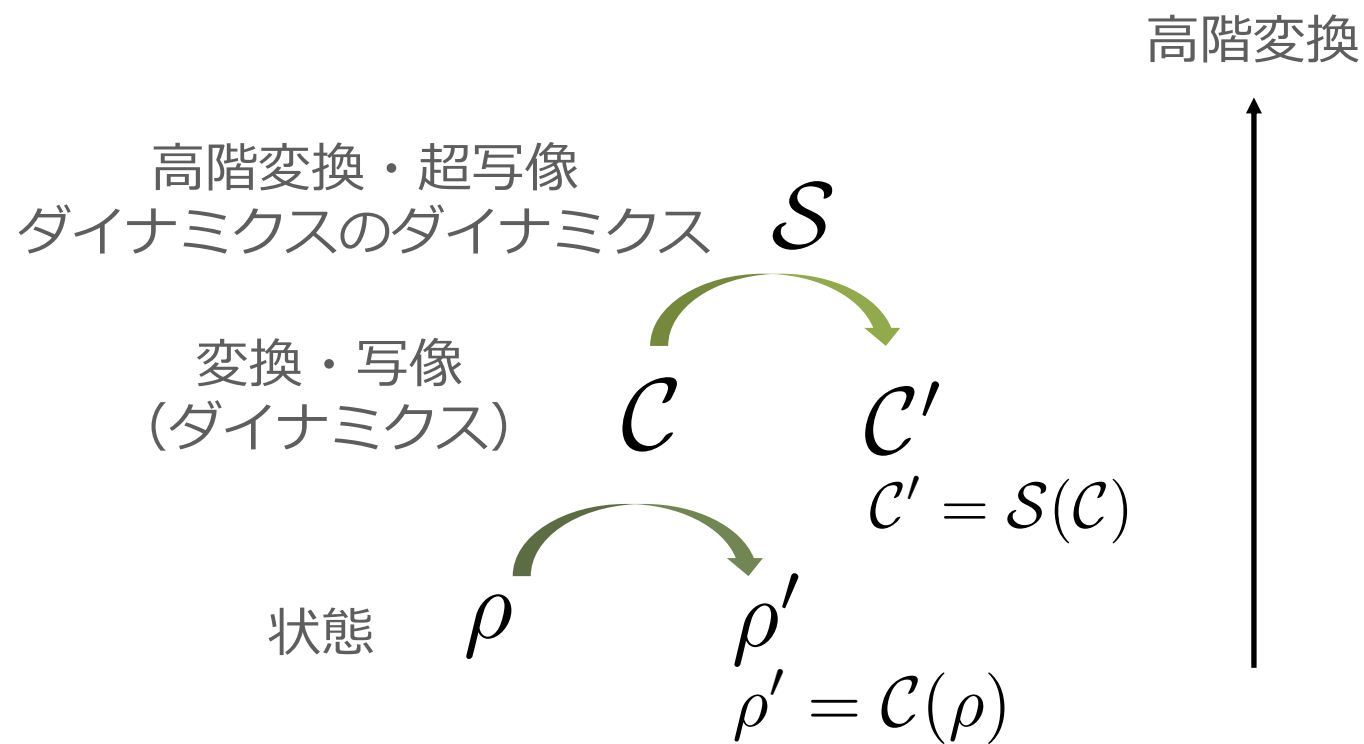
数学的には、量子超写像*, プロセス行列**と呼ばれる枠組みを用いる

*G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti, Phys. Rev. A (2009)

*G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti, Phys. Rev. Lett. (2008)

**Oreshkov, Costa and Brukner, Nature Commun. (2012)

状態・変換・高階変換のヒエラルキー

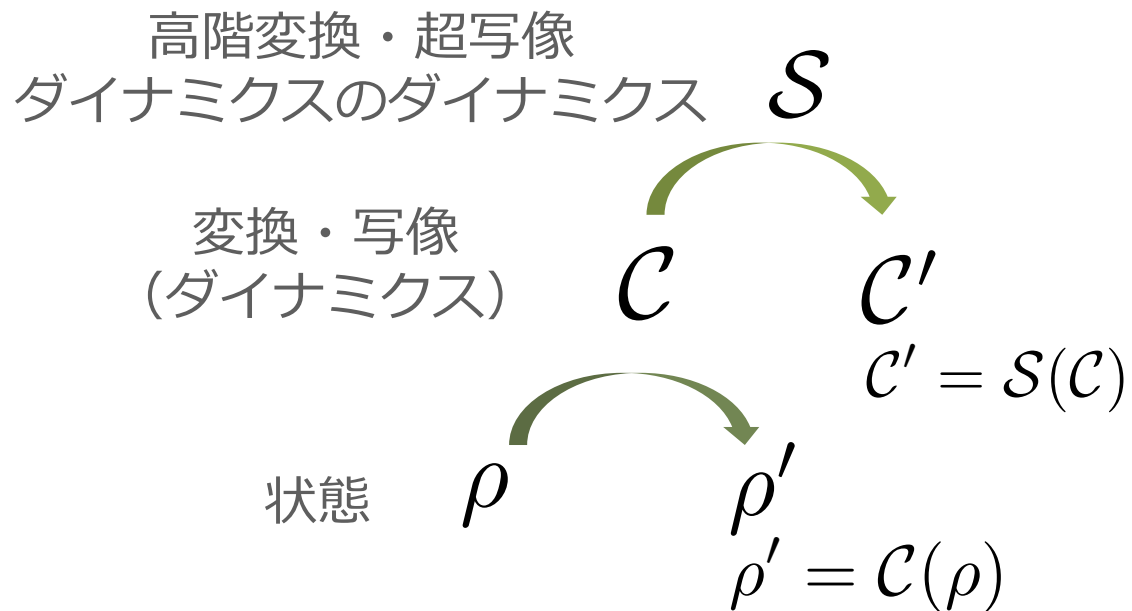


量子力学で実行可能な決定論的な変換の持つ数学的な性質：完全正值トレース保存変換だった



量子力学で実行可能な決定論的な高階変換の持つ数学的な性質は何か？

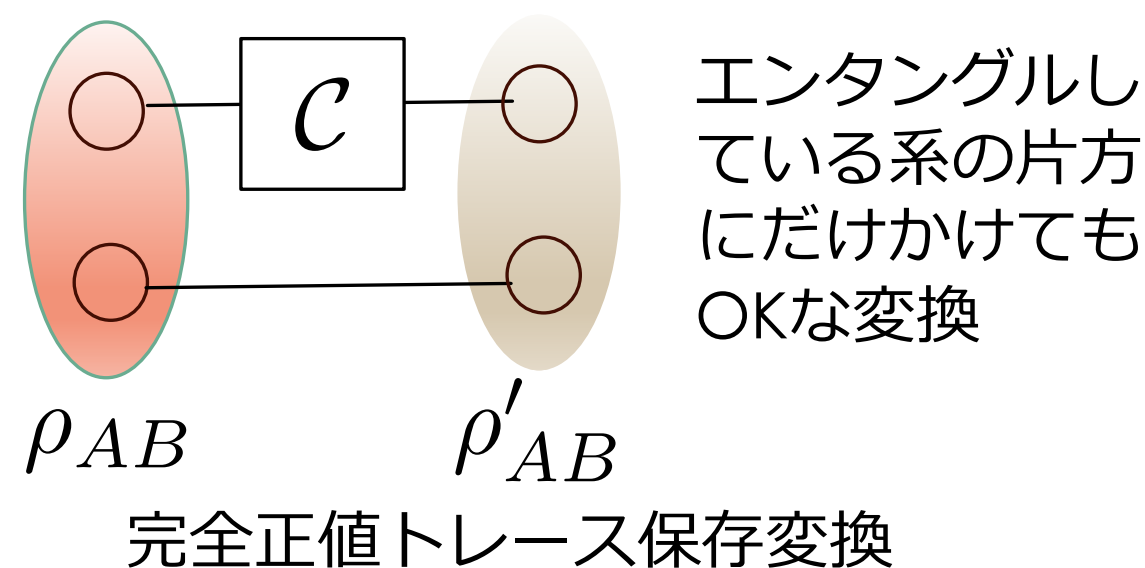
状態・変換・高階変換のヒエラルキー



ρ : 半正定値行列(演算子)、トレース1
対角要素 ≥ 0 , 対角成分の和が1

量子力学の範囲内で実行可能な変換

- S 完全正値保存
トレース保存変換
- C 完全正値トレース保存変換

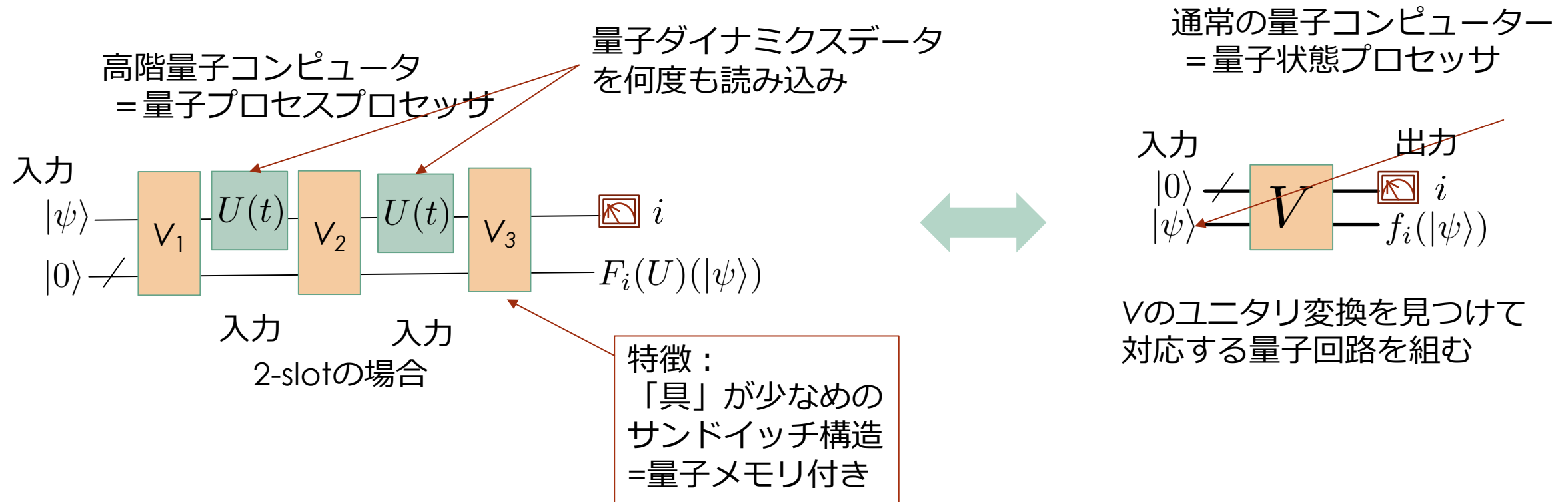


量子力学においてプログラマブルに実行可能な高階変換

- 数学的枠組みはできている

G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti, PRL (2008), PRA (2009)

- 量子回路モデルで実行可能な高階変換の持つべき数学的性質：
完全正值保存・トレース保存保存 変換



ユニタリ変換に対するさまざまな高階量子変換アルゴリズム

関数型量子プログラミングに使えるような未知のユニタリ変換の高階関数: $\mathcal{S} : U \rightarrow f(U) = V_U$

- ➡ 複製 $V_U = U \otimes U$ G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti, PRL (2008)
- ➡ 反転 $V_U = U^{-1} = U^\dagger$ “undo” M.T. Quintino, Q. Dong, A. Shimbo, A. Soeda and M. Murao, PRL (2019)
S. Yoshida, A. Soeda and M. Murao, PRL (2023), Y.-A. Chen et al., arXiv:2403.04704
- ➡ 複素共役 $V_U = U^*$ J. Miyazaki, A. Soeda and M. Murao, PRR (2019), D. Ebler et al., IEEE Tran Info Theory (2023)
- ➡ 転置 $V_U = U^T$ M.T. Quintino, Q. Dong, A. Shimbo, A. Soeda and M. Murao, PRA (2019)
- ➡ 制御ユニタリ化 $V_U = |0\rangle\langle 0| \otimes I + e^{i\theta_U} |1\rangle\langle 1| \otimes U$ Q. Dong, S. Nakayama, A. Soeda and M. Murao, arXiv:1911.01645v3
- ➡ 量子スイッチ $V_{U_1, U_2} = |0\rangle\langle 0| \otimes U_1 U_2 + |1\rangle\langle 1| \otimes U_2 U_1$ G. Chiribella, G. M. D'Ariano, P. Perinotti, and B. Valiron, PRA (2013)
- ➡ 中和 $V_U = I$ Q. Dong, S. Nakayama, A. Soeda and M. Murao, arXiv:1911.01645v3
D. Trillo, B. Dive, and M. Navascués, PRL (2023)
- ➡ 準同型・反準同型関数 M.T. Quintino and D. Ebler, Quantum (2022)
- ➡ ハミルトニアン力学の線形変換・固有値変換 T. Odake, H. Kristjánsson, A. Soeda and M. Murao, PRR (2024)
T. Odake, H. Kristjánsson, P. Taranto and M. Murao, PRR (2025)

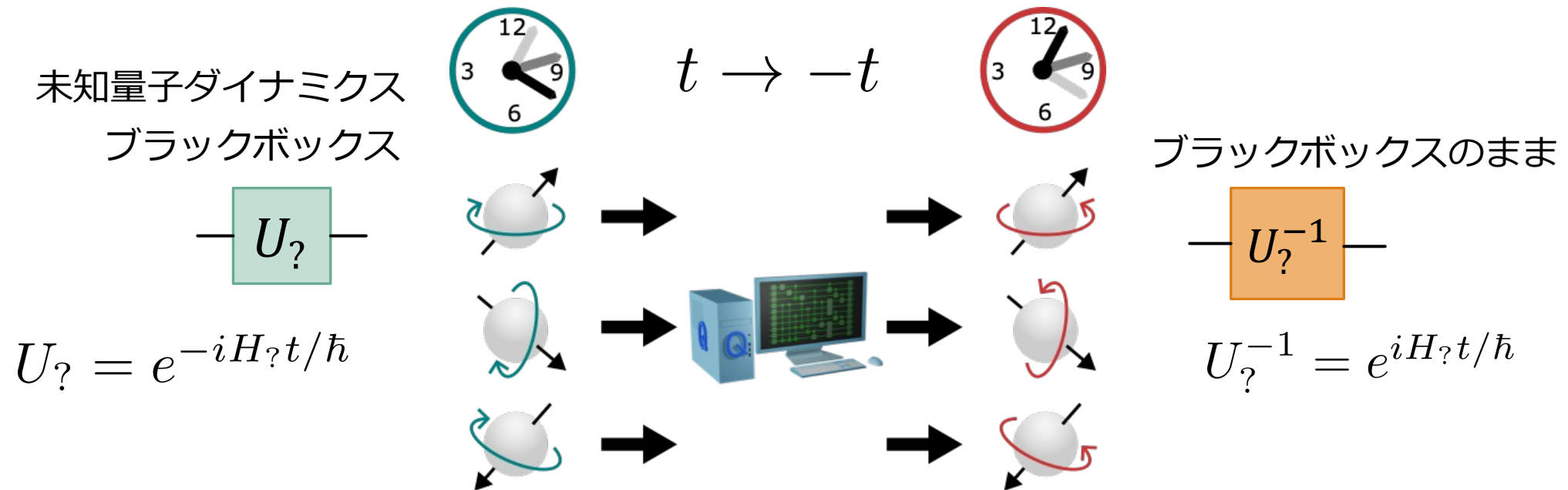
1回のコールでは高階量子変換を実装できず、複数回または分数回のコールが必要

$$U \times n \qquad U^{\frac{1}{m}} \times n$$

ダイナミクスの量子学習に高階変換を応用

量子ビットの

■ 未知の量子ダイナミクスの時間逆回しを正確に実行する量子アルゴリズム

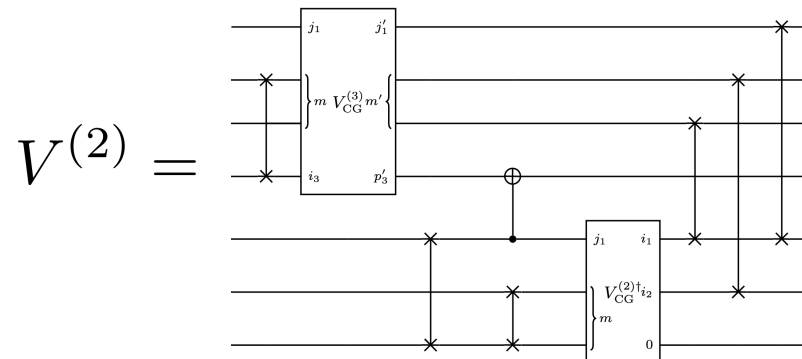
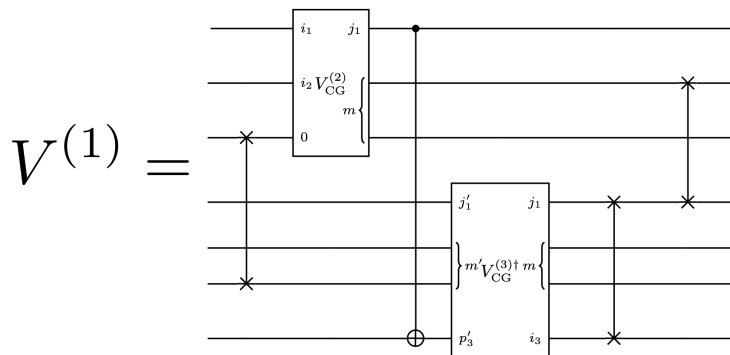
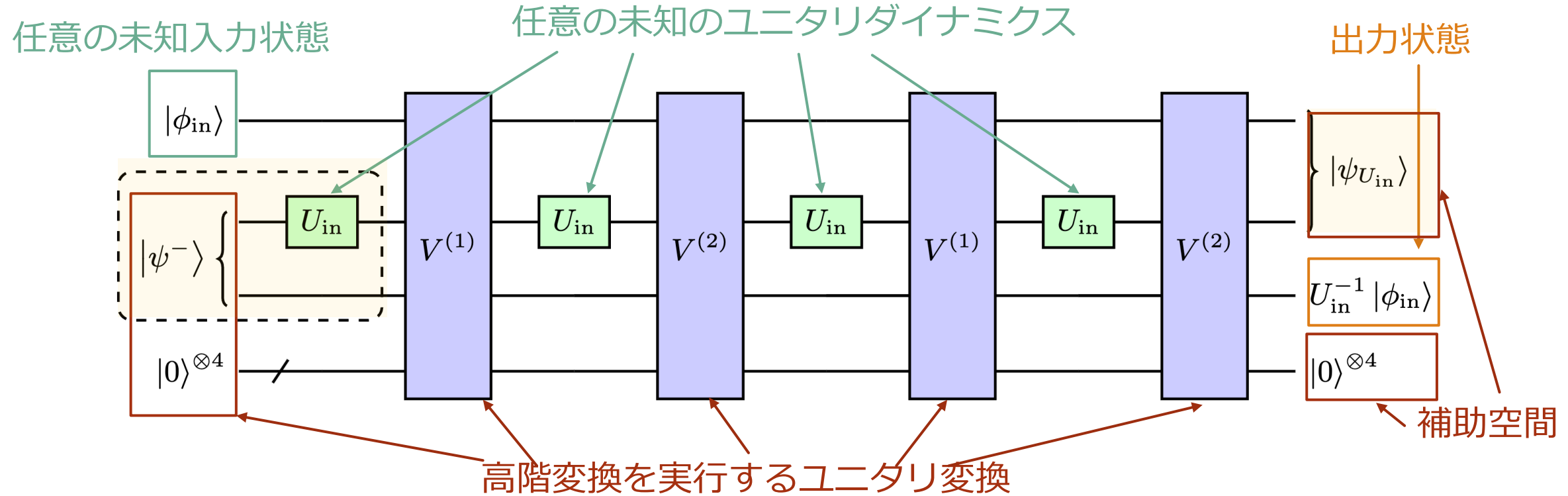


ブラックボックスのまま、 $U_?$ を4回コールすることで、 $U_?$ を量子コンピュータに学習させ、時間逆回しの量子ダイナミクス $U_?^{-1}$ を再生可能

皆が予想していなかったことで、この結果は驚きだった

d 次元なら d^2 回のコールが必要なことも証明: T. Odake, S. Yoshida, and M. Murao, PRL, in press (2025)

量子アルゴリズム（量子回路）



対称性を配慮した良い
重ね合わせ状態の基底
を使うところがコツ

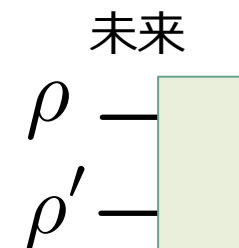
$V_{CG}^{(k)}$: Clebsch-Gordan
変換

D. Bacon, I.L. Chuang, A.W. Harrow, PRL (2006)

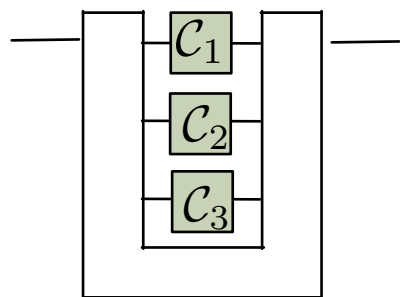
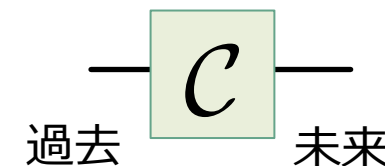
ところで、

高階量子計算の入力の因果順序

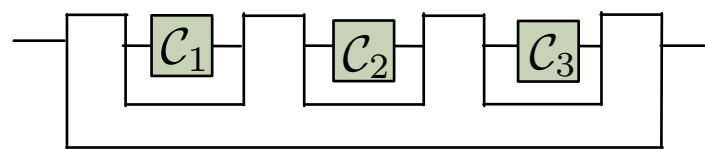
- ユニバーサルな入力への変換を考える時、状態 ρ には「過去」がないので、「未来」部分でしかつなげられない



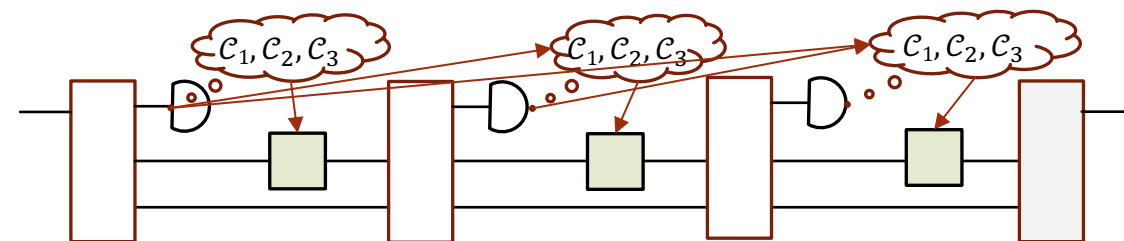
- 変換の変換を考える場合は、変換 c には「過去」と「未来」があるので、さまざまなつなぎ方がある



並列



直列



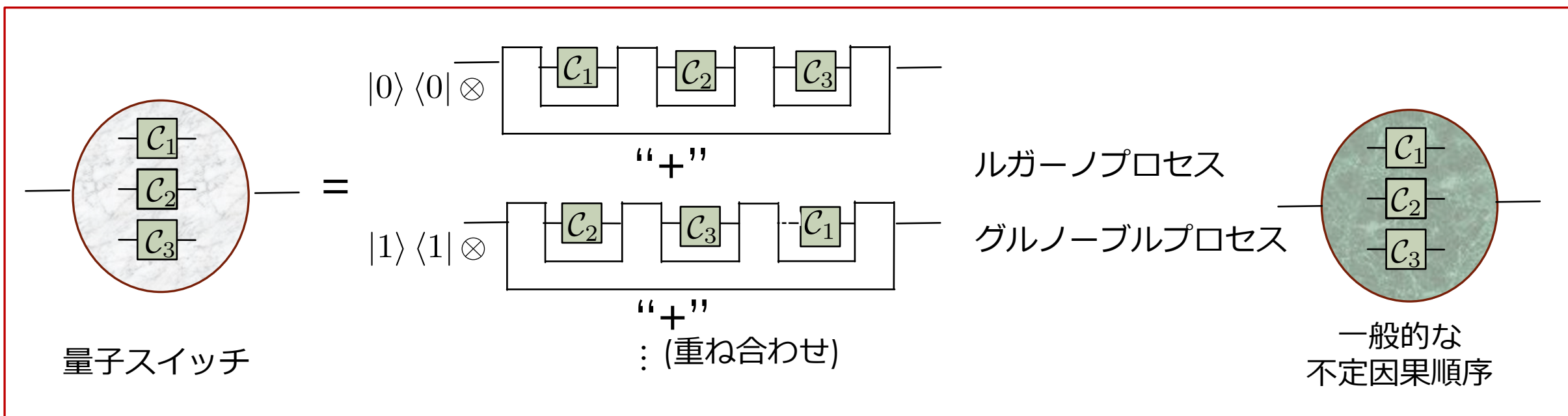
ダイナミカルな順序制御
(古典的な因果順序制御)

不定因果順序（異なる因果順序の重ね合わせ含む）

■ 異なる因果順序の重ね合わせや、より??だが量子力学には反しないもの

J. Wechs, H. Dourdent, A. A. Abbott, and C. Branciard, PRX Quantum (2021)

量子回路によって記述することができない高階量子変換



O. Oreshkov, F. Costa, and C. Brukner, Nat. Comm. 3, 1092 (2012), G. Chilibella et al., Phys. Rev. A 88, 022318 (2013)

2スロットの純粋超変換は量子スイッチ型しかないことを証明: W. Yokojima, M. T. Quintino, A. Soeda and M. Murao, Quantum (2021)

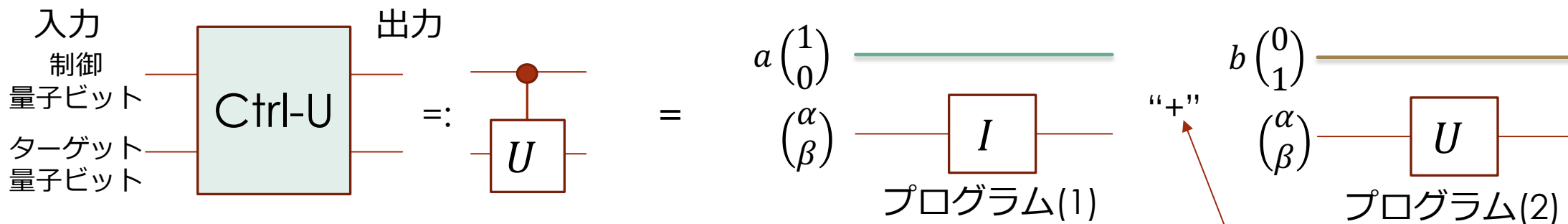
ウォームアップ:

制御ユニタリ変換(これは通常の変換)

■ 量子プログラムは、量子ビット状態の変換(ユニタリ変換)

■ 例：制御ユニタリ変換

2量子ビットの量子ゲート



制御量子ビットの状態が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ だったらターゲット量子ビットになにもしない

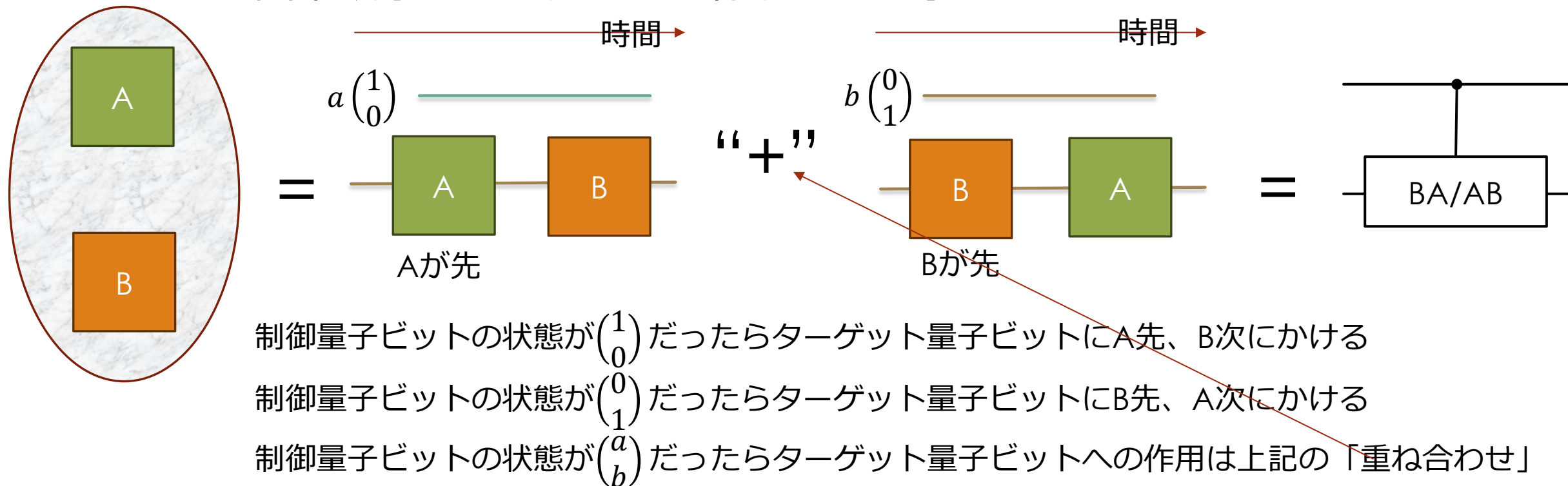
制御量子ビットの状態が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だったらターゲット量子ビットにを作用させる

制御量子ビットの状態が $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ だったらターゲット量子ビットへの作用は上記の「重ね合わせ」

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Ctrl-U}} a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes U \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

量子スイッチ（2つの変換を入力として1つの変換を出力）

二つの因果順序の重ね合わせを作り出す量子メカニズム

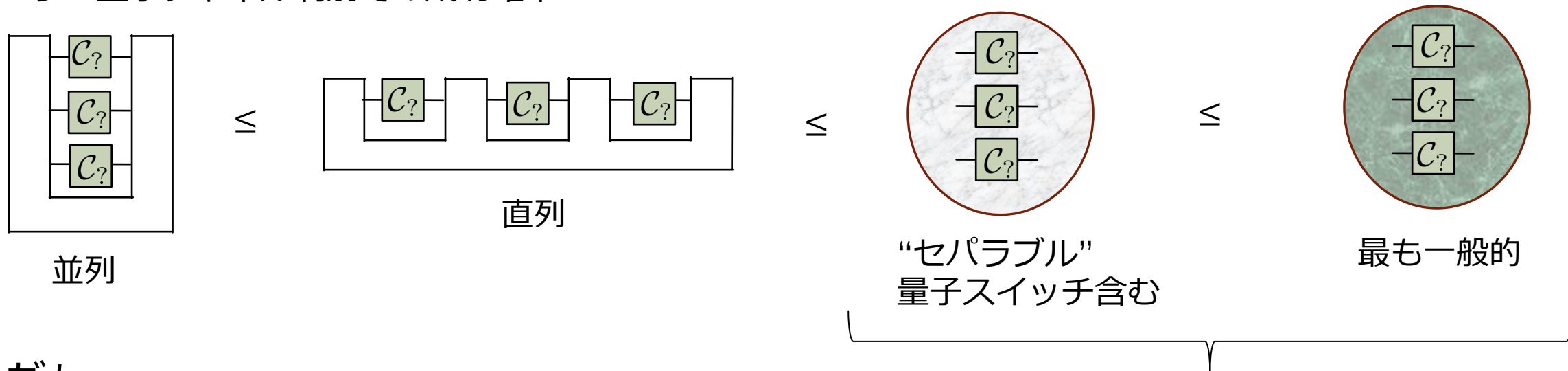


量子力学の公理には反していないが、量子回路のような、変換をかける順序が決まっている方法では実装不可能なことが証明されている

不定因果順序は量子変換の判別をパワーアップ

- ➡ 違いに非直交の量子変換の候補から、 $\mathcal{C}_?$ を当てる量子変換判別タスク

最小エラー量子チャネル判別での成功確率

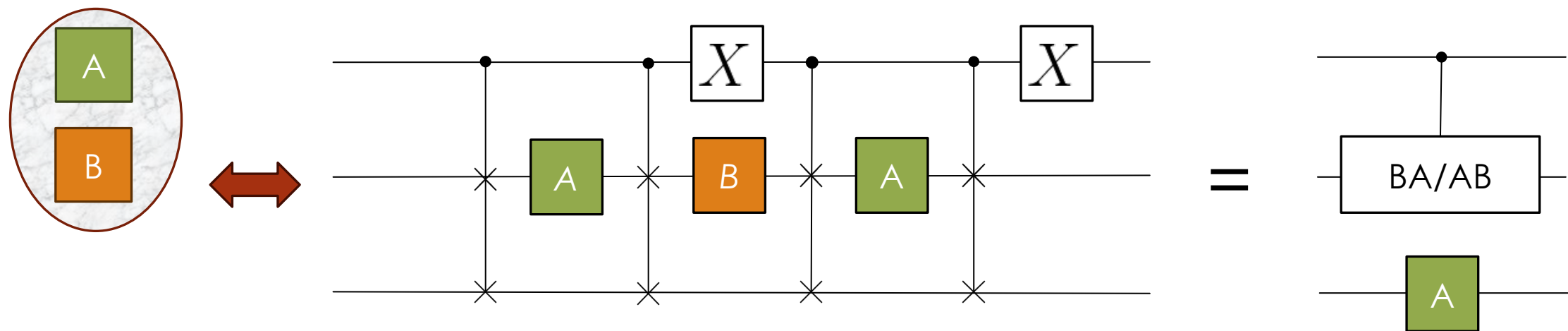


ただし、
候補に群論的な良い性質がある場合は、並列で十分なことも証明した。

不定因果順序：因果順序に従う量子回路では実装できない

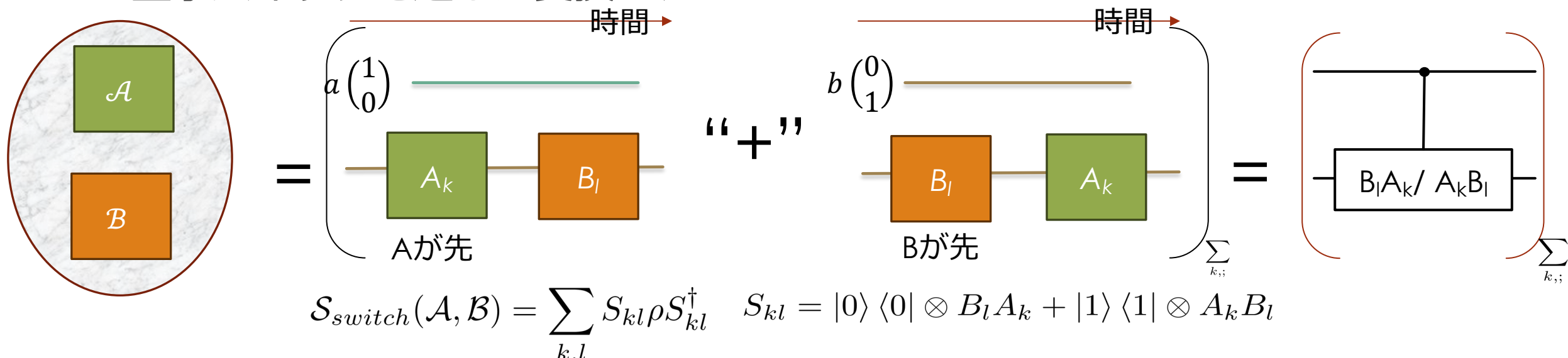
量子スイッチの量子回路シミュレーション（ユニタリ変換）

- 量子スイッチに入れる変換 A , B がユニタリ変換だったら、片方のユニタリ変換を一回余分にコールすることで、量子スイッチの実行する変換をシミュレート可能



量子スイッチの量子回路シミュレーション（一般量子変換）

- ➡ 一般量子変換はクラウス演算子を用いて書ける $\mathcal{C}_1(\rho) = \sum_k A_k \rho A_k^\dagger$
- ➡ 二つの一般量子変換 $\mathcal{A}(\rho) = \sum_k A_k \rho A_k^\dagger$, $\mathcal{B}(\rho) = \sum_l B_l \rho B_l^\dagger$ があったとき、量子スイッチを通した変換は、

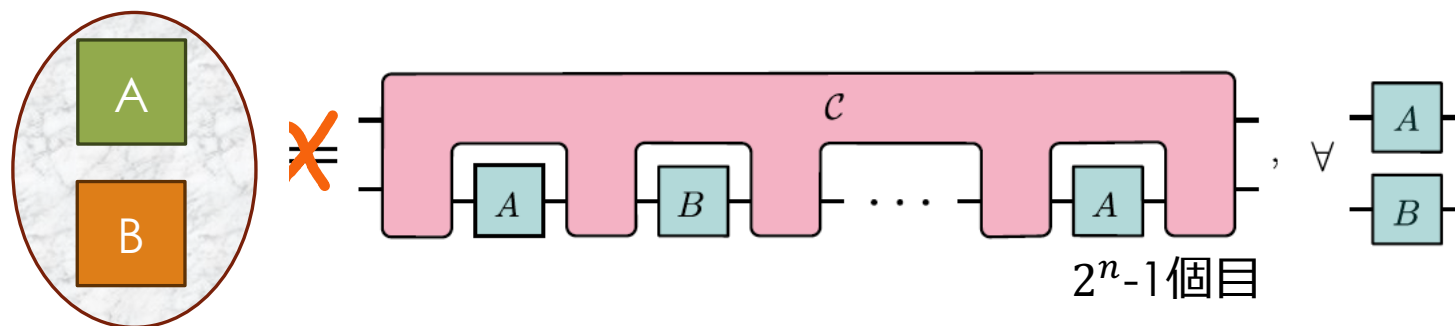


順序の異なる2つの一般量子変換のクラウス演算子に相関を生じさせている！

一般量子変換の量子スイッチシミュレーションの困難性

J. Bavaresco, S. Yoshida, T. Odake, H. Kristjánsson, P. Taranto M. Murao and M. T. Quintino, Nat. Comm. 16, 10216 (2025)

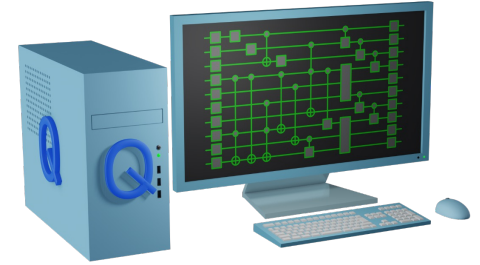
- Aのコール数が 2^n-1 以下であれば、量子回路とダイナミカルな順序制御で、量子スイッチの作用を正確にシミュレートすることはできないことを証明 (Bは1回のみコール)
- これは、量子スイッチが作り出す二つの一般量子変換のクラウス演算子の相関は、因果順序を保ったままでは作りだすことが計算量的に困難であることを示している。



ただ、

- この不可能性の証明は、Aのコール数が 2^n の場合には拡張できない
- ユニタリ反転の場合のように、ある一定のコール数で突然シミュレート可能となる可能性も、今の所排除できない

まとめ



「量子力学100年とこれから」に関して、「これから」の発展の一つとして

$$\text{量子情報} = \text{量子力学} + \text{情報処理}$$

の観点から「**プログラマブルな**」量子力学の定式化を説明した。

「重ね合わせ」が引き起こす不思議な性質や、情報処理での非直感的な効果として

- エンタングルメントと量子テレポーテーション、その因果関係の不思議さ
- プログラマブルな量子力学の新たな発展である高階量子計算の概念
- 未知ユニタリ反転アルゴリズムの存在と量子スイッチ

を紹介した。

まだ量子情報の研究ステージは始まったばかり。量子計算や応用的な研究のみならず、「プログラマブル」な点を活かした新たなアイデアで、量子力学の新たな側面を探求・解明・応用していきたい。