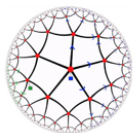


2019年度仁科記念講演会@東大理学部, 2019年12月6日

量子ビットの幾何学から重力へ

高柳 匡

京都大学基礎物理学研究所



It from Qubit
Simons Collaboration



① はじめに

物理学の研究において、最も基礎となる操作は
マクロなものを拡大してミクロな構造を調べること。
つまり**顕微鏡**（素粒子物理では加速器）を覗く！

では重力の物理学における`最高精度'の顕微鏡は？

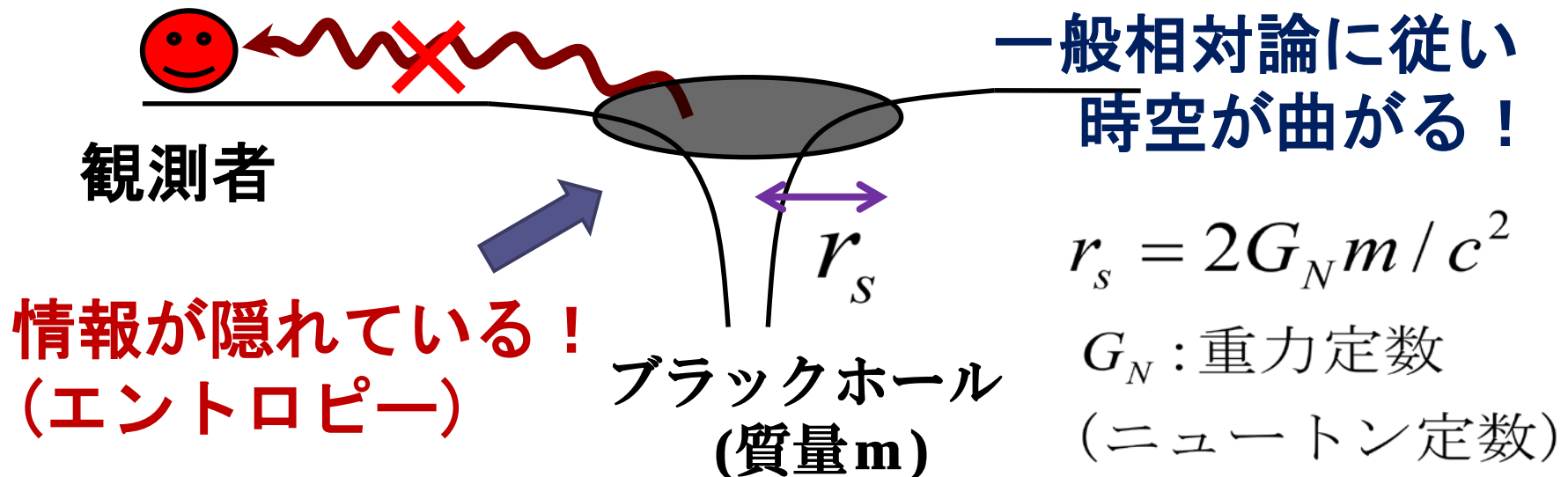
⇒ **ホログラフィー原理（ゲージ重力対応）！**

ホログラフィー原理は実際の実験ではないが、
重力理論の思考実験の顕微鏡としての役割を果たす。

⇒ **重力理論の時空を拡大すると何かが見えるか??**

重力理論特有の現象の中で最も重要なものとして、
ブラックホールがある(思考実験のターゲット)。

ブラックホールは重い星の重力崩壊などで形成されるが、**極めて強い万有引力のために光すら抜けせず、ブラックホールの中は外から見えない！**



ブラックホールのエントロピー (Bekenstein-Hawking公式)

[1972-1976]

$$S_{BH} = \frac{k_B \cdot c^3}{4G_N \cdot \hbar} \cdot A_{BH}$$

⇒ ブラックホールの熱力学

A_{BH} =ブラックホールの面積 ⇒ 幾何学

G_N =重力定数 ⇒ 重力

$\hbar$ =プランク定数 ⇒ 量子力学

k_B =ボルツマン定数 ⇒ 統計物理・量子情報

量子重力
の理論が
必要！

BHエントロピーは体積ではなく面積に比例する！

➡ 重力理論の自由度は面積に比例する！

重力理論の自由度 $\propto$ 面積



ホログラフィー原理

['t Hooft 1993, Susskind 1994]

ホログラフィー原理

ある時空の重力理論 = 境界の量子多体系 (物質)



=

量子物質



BHエントロピー ($\propto$ 面積) = 物質のエントロピー ($\propto$ 体積)

[超弦理論からのBHエントロピー導出 : Strominger-Vafa 1996]

目次

- ① はじめに
- ② ゲージ重力対応とは？
- ③ 量子エンタングルメントとゲージ重力対応
- ④ エンタングルメント・ウェッジ
- ⑤ 量子ビットからの時空の創発
- ⑥ おわりに

②ゲージ重力対応とは？

ホログラフィー原理で最もよく知られた例：

ゲージ重力対応 (AdS/CFT対応) [Maldacena 1997]

AdS/CFT

D+1次元反ドジッター時空
(AdS空間)における
重力理論 (超弦理論)

=

D次元空間における
ゲージ理論 (CFT)



一般相対論近似

負の宇宙項を持つ
一般相対論

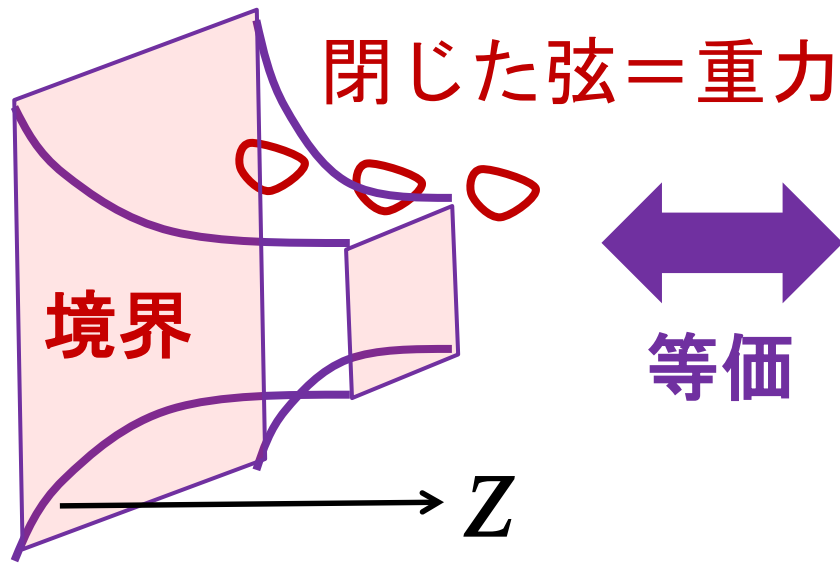
=

強結合多自由度 (ラージN) の
ゲージ理論



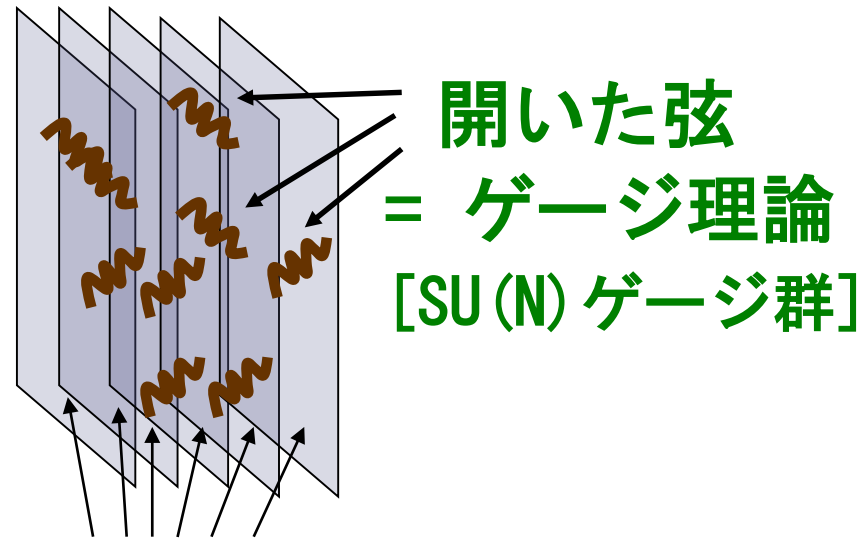
CFT=共形場理論
(量子臨界点の理論)

反ドジッター (AdS) 時空 の重力理論



$$ds^2 = R^2 \cdot \frac{dz^2 - dt^2 + \sum_{i=1}^d dx_i^2}{z^2}$$

ゲージ理論 (CFT)



N枚のDブレーン
(超弦の凝縮したもの)

ブラックブレーンの熱力学

ゲージ理論の熱力学

等価

ゲージ重力対応 [Maldacena 1997] が発見されてから20年以上経過し、非常に多くの検証がなされており、疑いのない等価性として広く受け入れられている。

しかし、その証明自体は未だに存在せず、ゲージ重力対応の基礎的メカニズムは完全には解明されていない。

例えばドジッター宇宙やビックバン宇宙のように現実の宇宙に関係する量子重力を解明するには、**ホログラフィー原理を一般化する必要がある**、ゲージ重力対応の基礎的メカニズムの理解は不可欠である。

その後、ゲージ重力対応のエンタングルメント・エントロピーの公式[笠-高柳 2006]が見出され、ゲージ重力対応が量子情報理論と結びつく発端となった。

その後の世界中の研究者による様々な研究で、

重力理論の時空 = 量子エンタングルメントの集まり

（英語で，“It from Qubit”と呼ばれたりもする）

という新しい考え方が生まれてきた。

この話題と最近の発展を以下では紹介したい。

hep-th論文(超弦理論・場の理論)の最近1年間被引用数ランキング

AdS/CFTの原著論文⇒
[Maldacena 1997]

AdS/CFTの対応原理⇒
[Witten 1998]

AdS/CFTの対応原理⇒
[Gubser-Klebanov-Polyakov 1998]

エンタングルメント・
エントロピー ⇒
[笠-高柳 2006]

Top Cited Articles during 2018 in hep-th

The 100 most highly cited papers during 2018 in the hep-th archive

1. [1075](#) citations in 2018

The Large N limit of superconformal field theories and supergravity

Juan Martin Maldacena (Harvard U.). Nov 1997. 21 pp.

Published in *Int.J.Theor.Phys.* **38** (1999) 1113-1133, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 231-252

HUTP-97-A097, HUTP-98-A097

DOI: [10.1023/A:1026654312961](#), [10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1](#)

e-Print: [hep-th/9711200](#) | [PDF](#)

[References](#) | [BibTeX](#) | [LaTeX\(US\)](#) | [LaTeX\(EU\)](#) | [Harvmac](#) | [EndNote](#)
[ADS Abstract Service](#); [AMS MathSciNet](#); [OSTI.gov Server](#)

2. [634](#) citations in 2018

Anti-de Sitter space and holography

Edward Witten (Princeton, Inst. Advanced Study). Feb 1998. 39 pp.

Published in *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 253-291

IASSNS-HEP-98-15

DOI: [10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2](#)

e-Print: [hep-th/9802150](#) | [PDF](#)

[References](#) | [BibTeX](#) | [LaTeX\(US\)](#) | [LaTeX\(EU\)](#) | [Harvmac](#) | [EndNote](#)
[ADS Abstract Service](#); [AMS MathSciNet](#); [ATMP Server](#)

http://inspirehep.net/info/hep/stats/topcites/2018/eprints/to_hep-th_annual.html

3. [501](#) citations in 2018

Gauge theory correlators from noncritical string theory

S.S. Gubser, Igor R. Klebanov, Alexander M. Polyakov (Princeton U.). Feb 1998. 14 pp.

Published in *Phys.Lett.* **B428** (1998) 105-114

PUPT-1767

DOI: [10.1016/S0370-2693\(98\)00377-3](#)

e-Print: [hep-th/9802109](#) | [PDF](#)

[References](#) | [BibTeX](#) | [LaTeX\(US\)](#) | [LaTeX\(EU\)](#) | [Harvmac](#) | [EndNote](#)
[ADS Abstract Service](#); [AMS MathSciNet](#)

4. [423](#) citations in 2018

Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT

Shinsei Ryu, Tadashi Takayanagi (Santa Barbara, KITP). Mar 2006. 5 pp.

Published in *Phys.Rev.Lett.* **96** (2006) 181602

NSF-KITP-06-11

DOI: [10.1103/PhysRevLett.96.181602](#)

e-Print: [hep-th/0603001](#) | [PDF](#)

③ 量子エンタングルメントとゲージ重力対応

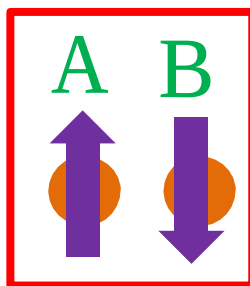
(3-1) 量子エンタングルメント

量子エンタングルメント(量子もつれ) = 2体の量子相関

簡単な例：スピン二つの系 (2 Qubit)

(1) 直積状態

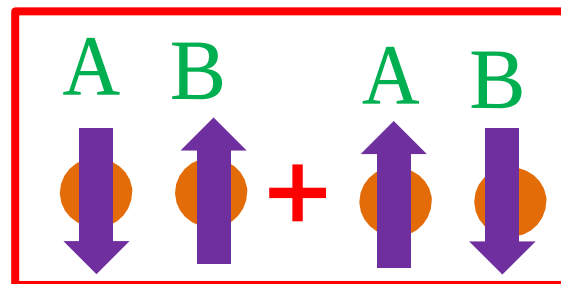
$$|\Psi_c\rangle = |\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B$$



→ エンタングルメントなし！

(2) ベル対 (EPR状態)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B \pm |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B \right)$$



→ あり！

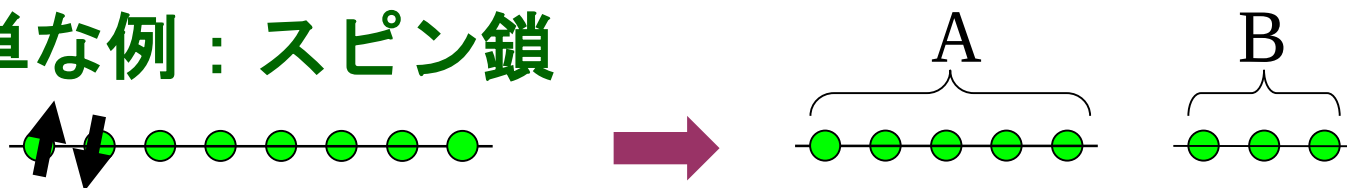
ベル対

エンタングルメント・エントロピー (EE)

エンタングルメントの度合 = ベル対の数 = E

まず量子系を部分系 A と B に分割する: $H_{tot} = H_A \otimes H_B$.

簡単な例: スピン鎖

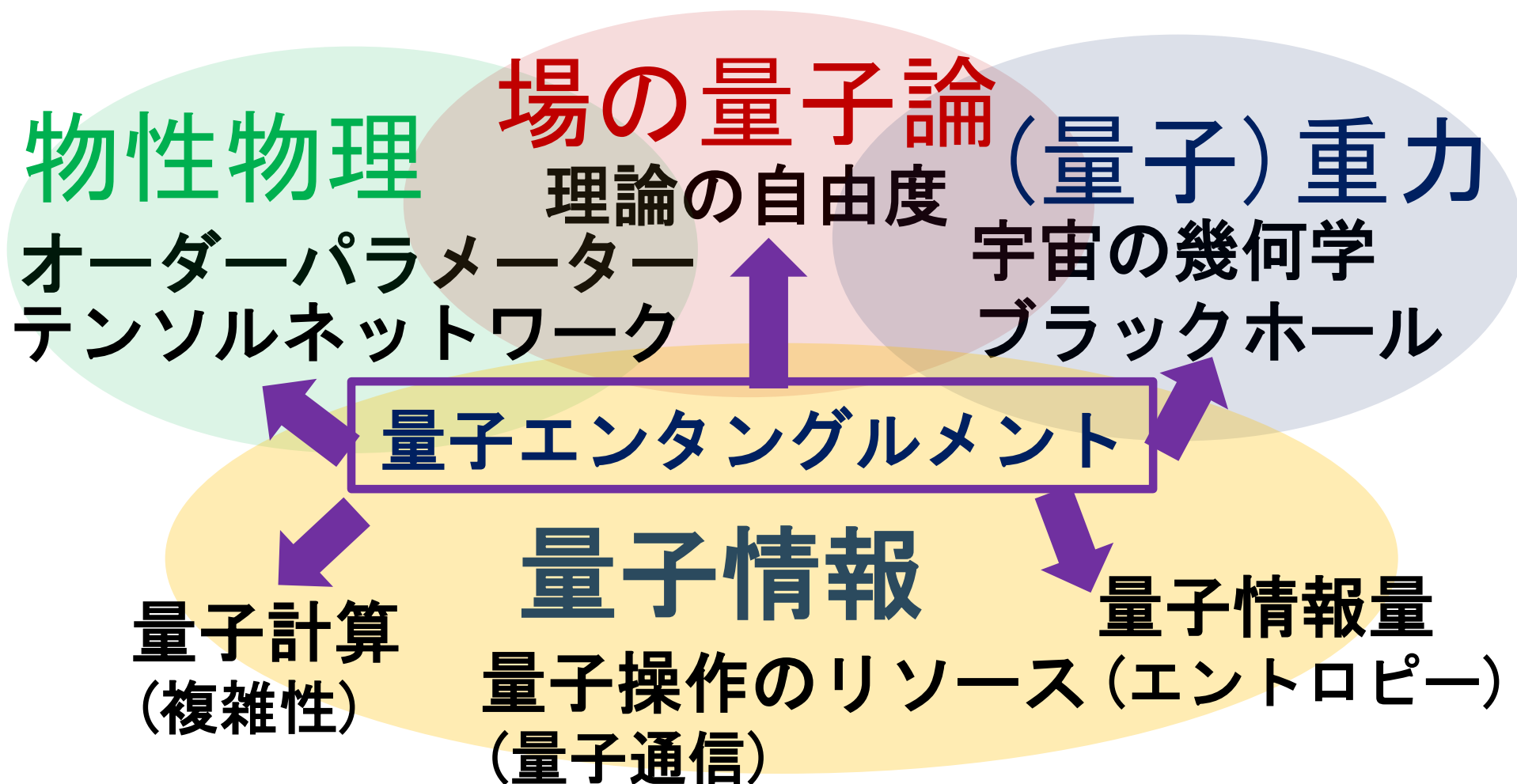


A の密度行列 ρ_A (B にアクセスできない観測者) を導入することで $\rho_A = \text{Tr}_B \left[\left| \Psi_{tot} \right\rangle \left\langle \Psi_{tot} \right| \right]$

エンタングルメント・エントロピー S_A が定義される:

$$S_A = -\text{Tr}[\rho_A \log \rho_A] \approx \text{A B 間のベル対の数}$$

量子エンタングルメントの概念図

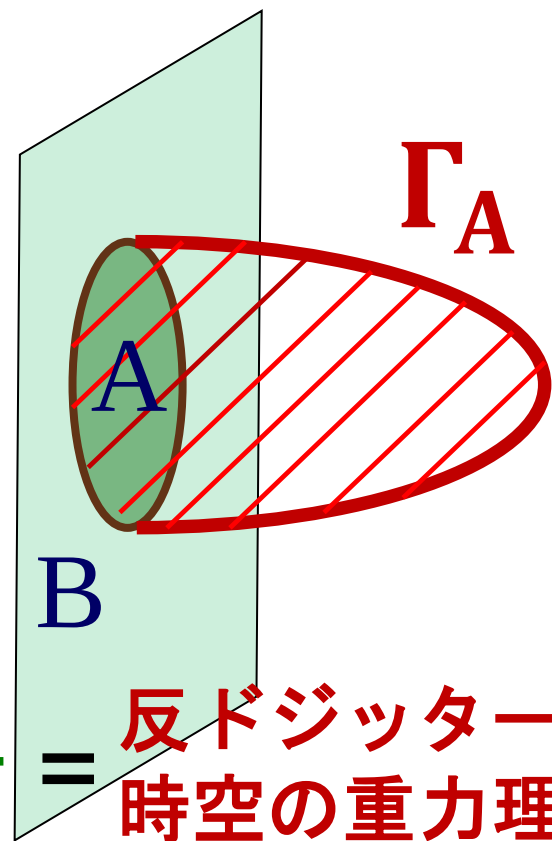


(3-2) エンタングルメント・エントロピー のホログラフィー公式 [笠-高柳 2006]

ゲージ重力対応において、ゲージ理論 (CFT) のエンタングルメント・エントロピーは次の公式で計算できる！

$$S_A = \frac{\Gamma_A \text{の面積}}{4G_N}$$

- ・ Γ_A は A を覆う曲面の中で最小の面積を持つ曲面 (極小曲面)。
- ・ A と Γ_A はホモロジー同値。

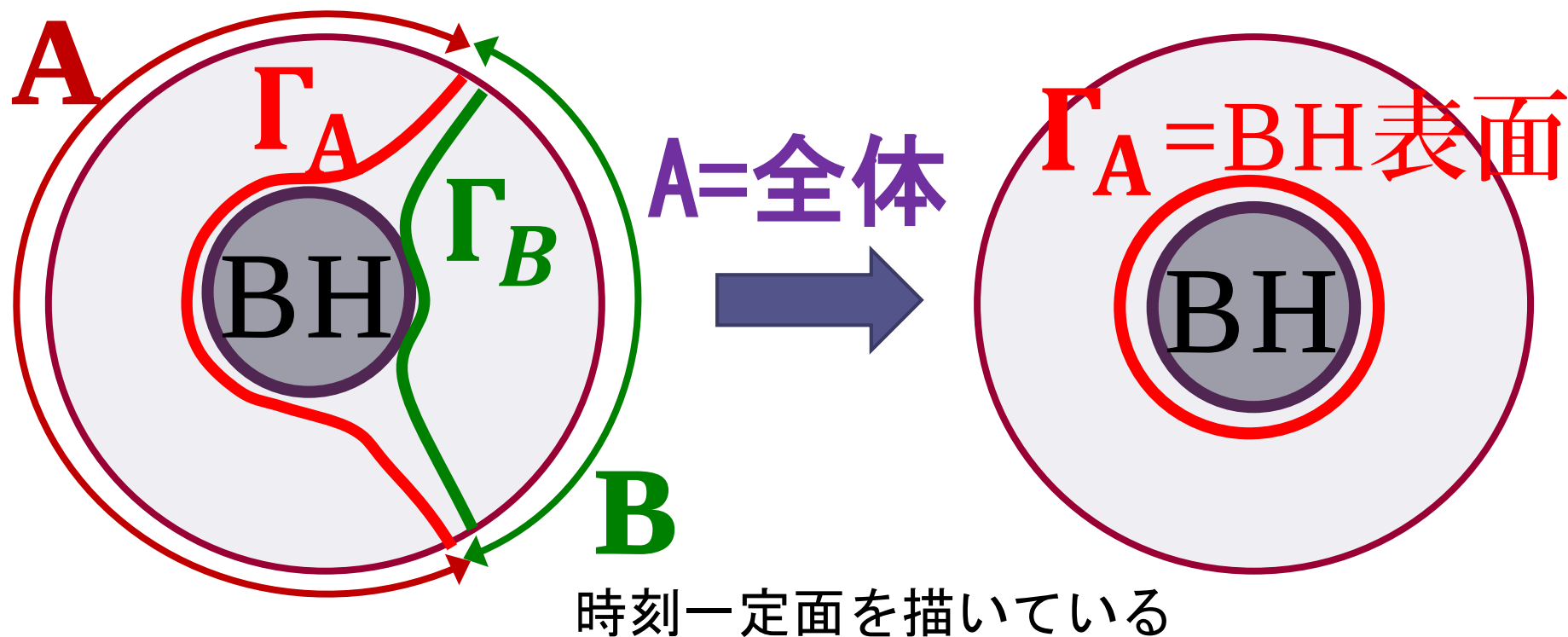


境界の C F T

=

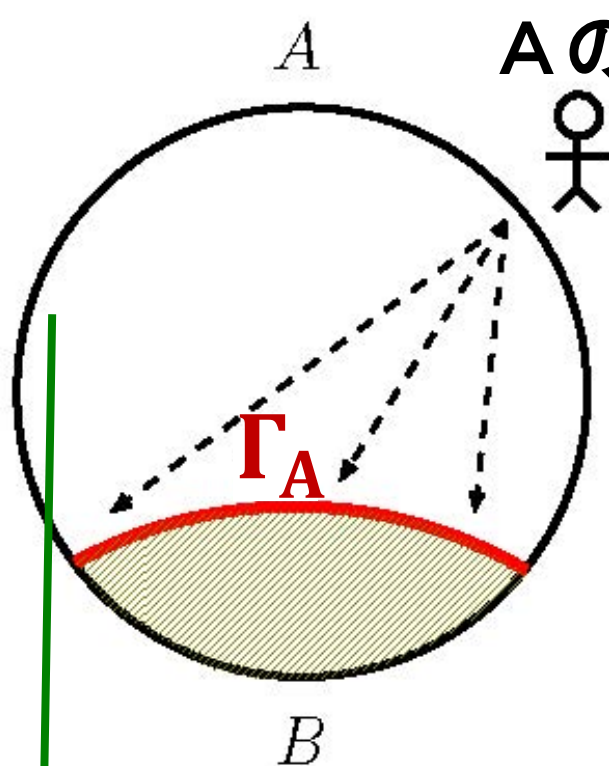
補足

この公式はブラックホールのエントロピーの一般化と思える。(A=系全体でBHエントロピーと一致)



AdS BH = CFTの有限温度状態 $\Rightarrow$ 混合状態 : $S_A \neq S_B$!

どのようにこの公式を見出したか？



Bにアクセスできない観測者は
 Γ_A にブラックホールがあるように見え、斜線の領域が隠される。
⇒そのBHのエントロピーがEE！

実際に、具体例で計算すると、場の理論の計算とうまく一致することが分かった。

後にLewkowyczとMaldacena (2013年)によりゲージ重力対応の原理から証明された。

Aがアクセスできるのはこの白い部分

⇒エンタングルメント・ウェッジと呼ばれる



@米国, セコイア国立公園

(3-3) アインシュタイン方程式とエンタングルメント

$$\Delta S_A \cong \Delta H_A$$

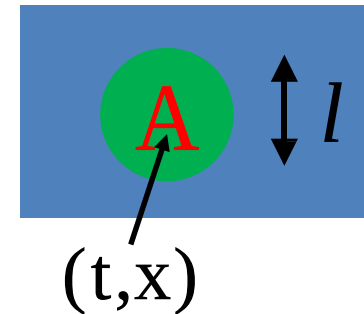
エンタングルメント・エントロピーの第一法則

$H_A = -\log \rho_A$: モジュラーハミルトニアン

[Blanco-Casini-Hung-Myers 2013,
Prudenziati-沼澤-野崎-高柳 2013]



$$\left(\partial_t^2 - \partial_l^2 - \partial_x^2 - \frac{3}{l^2} \right) \Delta S_A(t, x, l) = \langle O \rangle \langle O \rangle$$



$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

➡ 第一法則はアインシュタイン方程式の一次摂動と一致！

[Lashkari-McDermott-Raamsdonk 2013, ...]

(3-4) 強劣加法性の証明

量子情報の基本となる不等式の強劣加法性 [Lieb-Ruskai 73]
が幾何学的に証明できる！

$$S_{A \cup B} + S_{B \cup C} \geq S_{A \cup B \cup C} + S_B$$

[Headrick-高柳 2007]

$$S_{A \cup B} + S_{B \cup C} \geq S_A + S_C$$

「量子情報の不等式＝幾何学の三角不等式」となる！

部分領域数は任意 $\Rightarrow$ エントロピー円錐 [Bao-Nezami-大栗-Stoica-Sully-Walter 2015]

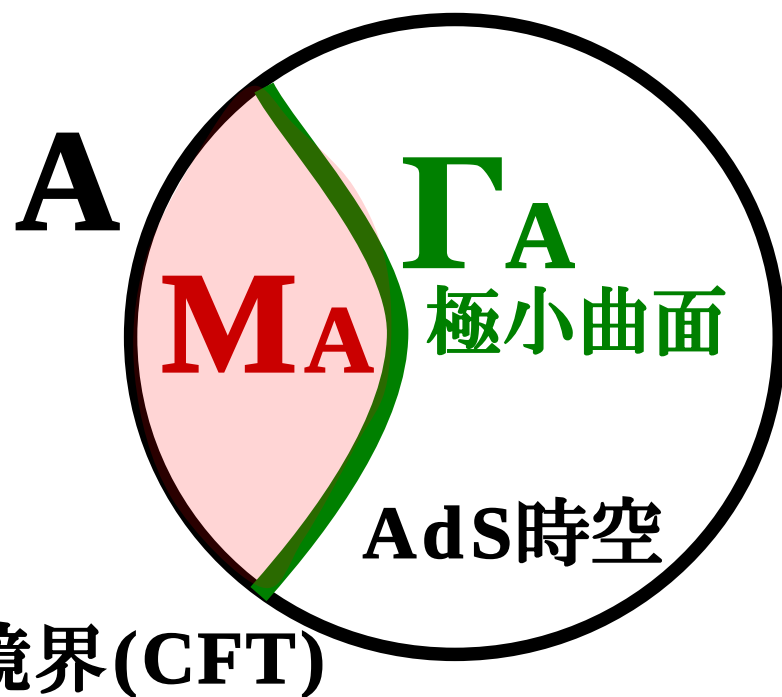
④エンタングルメント・ウェッジ

(4-1) エンタングルメント・ウェッジ(EW)とは？

ゲージ理論(CFT)の領域Aに対応するAdS時空の領域は？

⇒エンタングルメント・ウェッジ M_A と呼び、

$M_A = A$ と Γ_A に囲まれる領域 で与えられる。



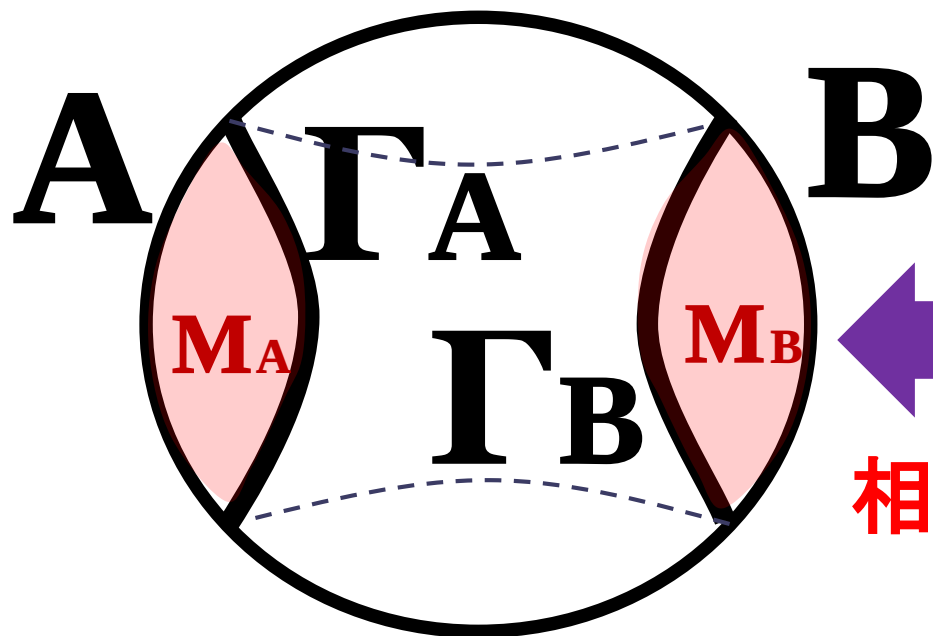
ρ_A in CFT

$\Leftrightarrow \rho_{M_A}$ in AdS 時空

[Hamilton-Kabat-Lifschytz-Lowe 2006, Czech-Karczmarek-Nogueira-Raamsdonk 2012, Wall 2012, Headrick-Hubeny-Lawrence-Rangamani 2014, Jafferis-Lewkowycz-Maldacena-Suh 2015, Dong-Harlow-Wall 2016, ...]

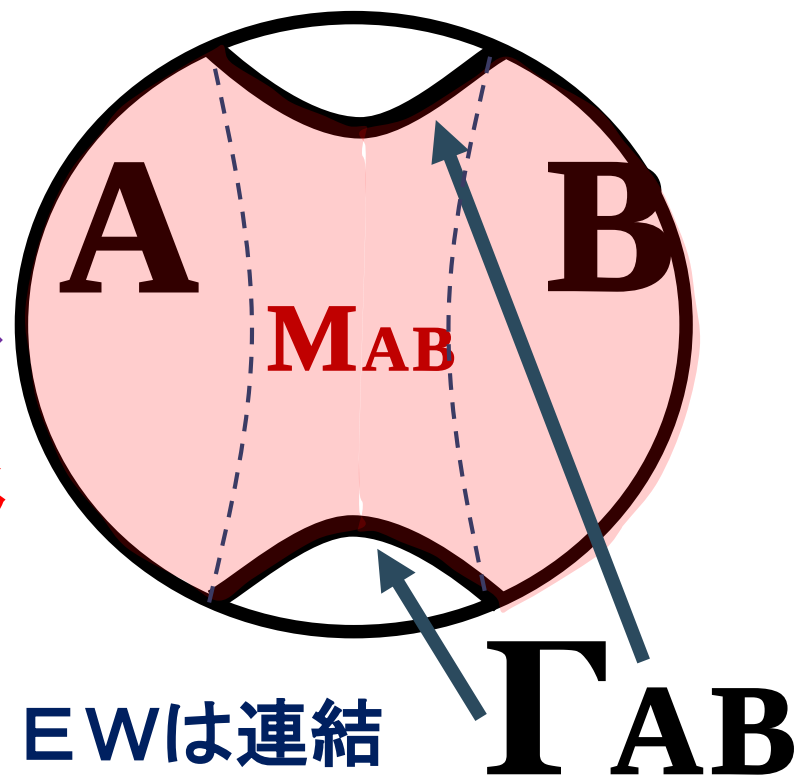
領域 $A \cup B$ のエンタングルメントウェッジと相転移

(i) AとBが離れている



$M_{AB} = M_A \cup M_B$
EWは非連結

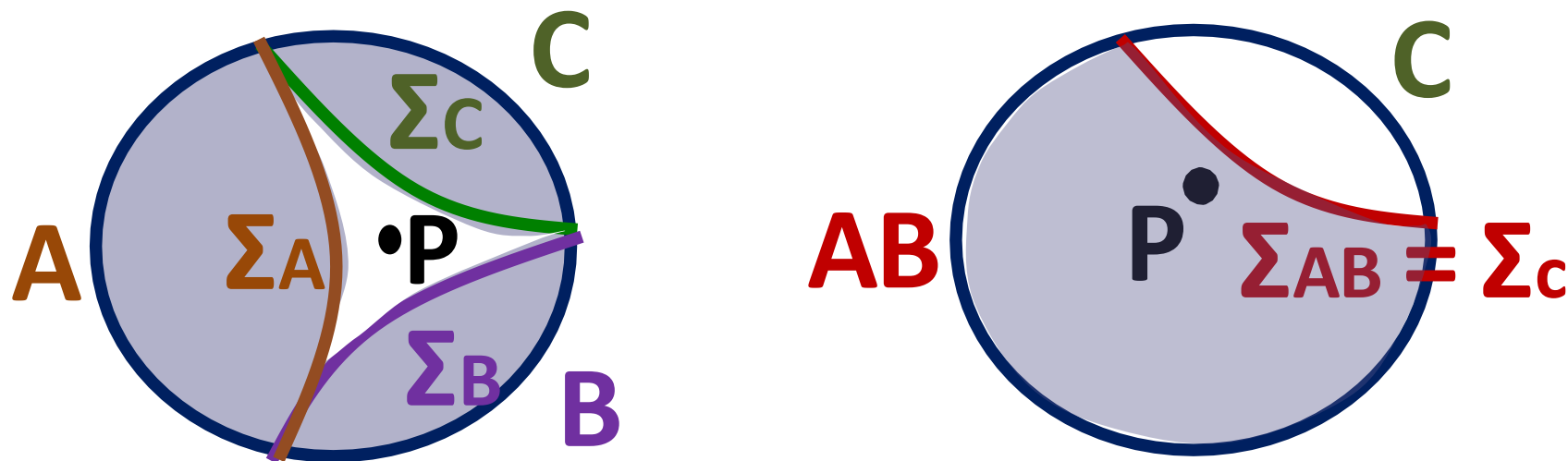
(ii) AとBが近い



EWは連結

相転移

(4-2) 量子誤り訂正符号との関係



P点の情報は ρ_{AB} から再現できるが、 ρ_A, ρ_B, ρ_C からは再現できない！ ➡ **量子誤り訂正符号の性質**

[Almheiri-Dong-Harlow 2014]

物理空間 = 全てのCFT状態 = 量子重力

∪

符号空間 = 低エネルギーCFT状態 = 一般相対論

量子誤り訂正符号で保護されている

古典的な時空が創発

(4-3) エンタングルメント・ウェッジ断面積

E_Wの断面積を次式で定義する:

$$E_W(\rho_{AB}) = \frac{\text{Area}(\Sigma_{AB})}{4G_N}$$



この量はゲージ理論の純粋化エンタングルメント (EoP)と呼ばれる量と等しいと予想される。

↑
純粋状態で表した場合の最小の
エンタングルメント・エントロピー

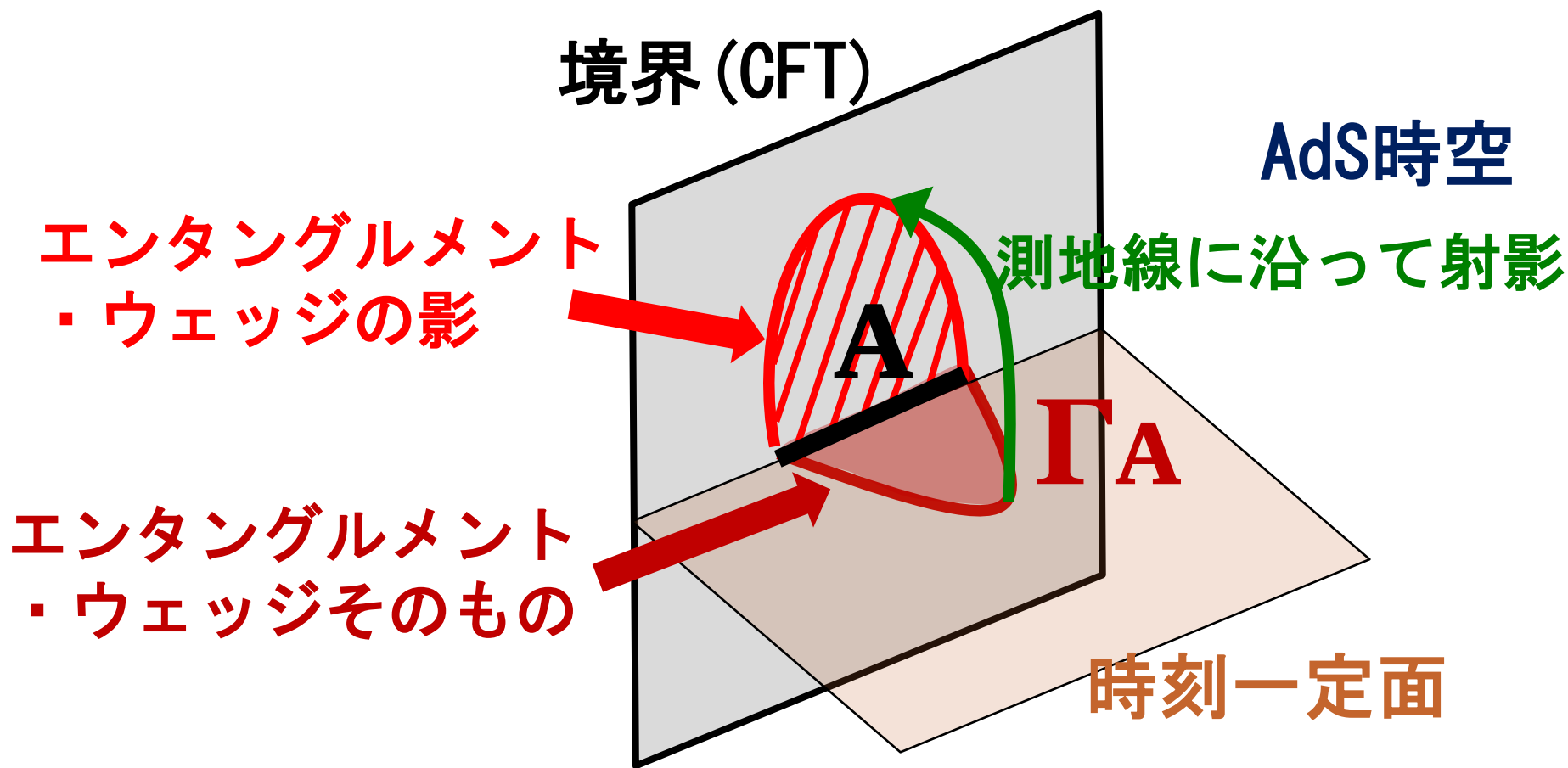
$$E_W(\rho_{AB}) = E_P(\rho_{AB})$$

[梅本-高柳 2017, Nguyen-Devakul-Halbasch-Zaletel-Swingle 2017,
CFTによる検証: Caputa-宮地-梅本-高柳 2018, ODDエントロピー解釈: 玉岡 2018]

(4-4) CFTからのEWの直接導出 [梅本-楠亀-鈴木-高柳 2019]

エンタングルメント・ウェッジはCFTにも存在するのか？

⇒エンタングルメント・ウェッジの影をCFTで検出できる。

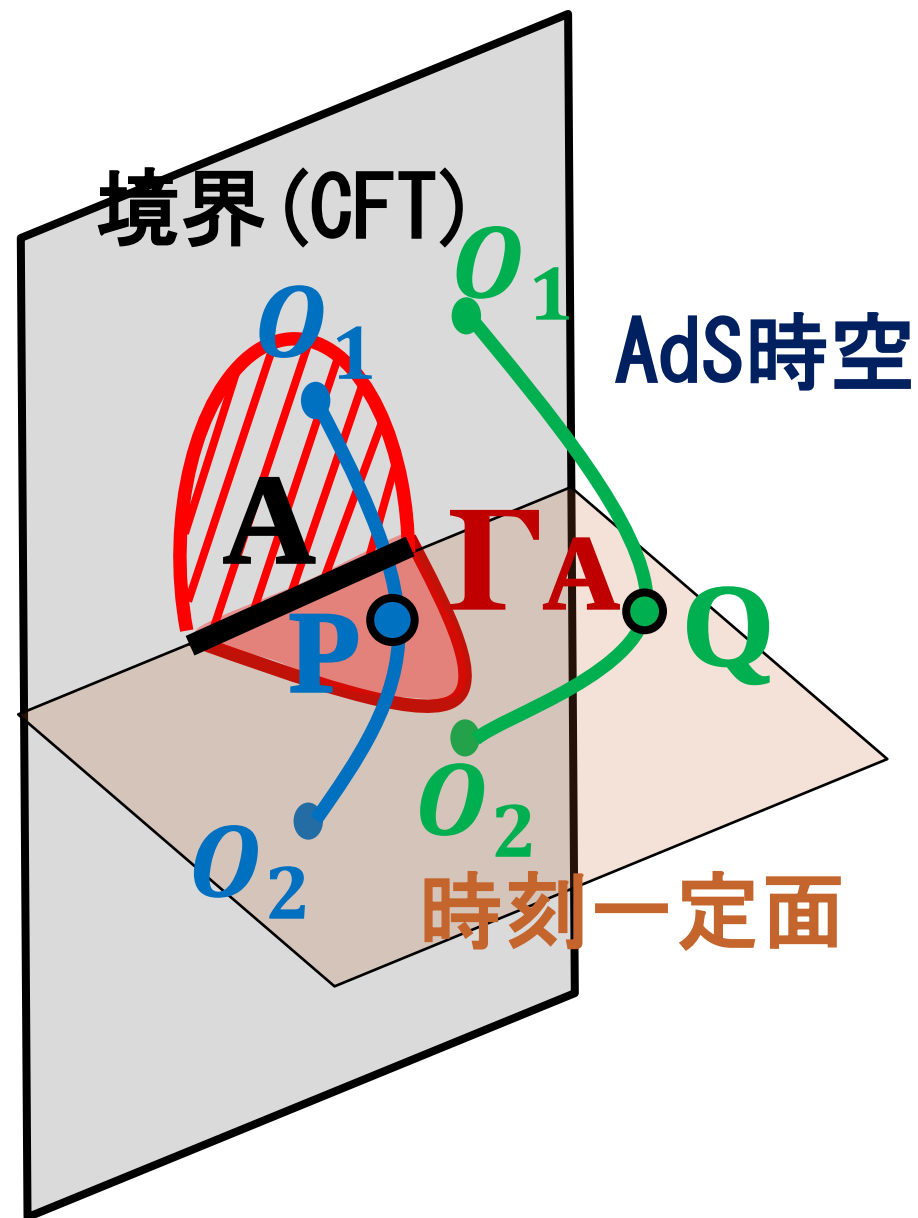


EWの影の検出方法の概略

領域 A の観測者 (ρ_A) は
点 P を観測できるが、
点 Q は観測できない！

二点相関関数 $\langle O_1 O_2 \rangle$ で
AdS空間の点 P や Q を
プローブすることができる。

そこで、 ρ_A で P や Q の
位置の変化を検出できるか
調べる！



量子情報の距離・計量

ρ_A が点Pの位置 x を検出できる

$\Rightarrow x \neq x'$ の時に $\rho_A(x)$ と $\rho_A(x')$ を区別できる。

二つの状態 ρ と ρ' が離れている度合いを測る量に
ブレス距離がある:

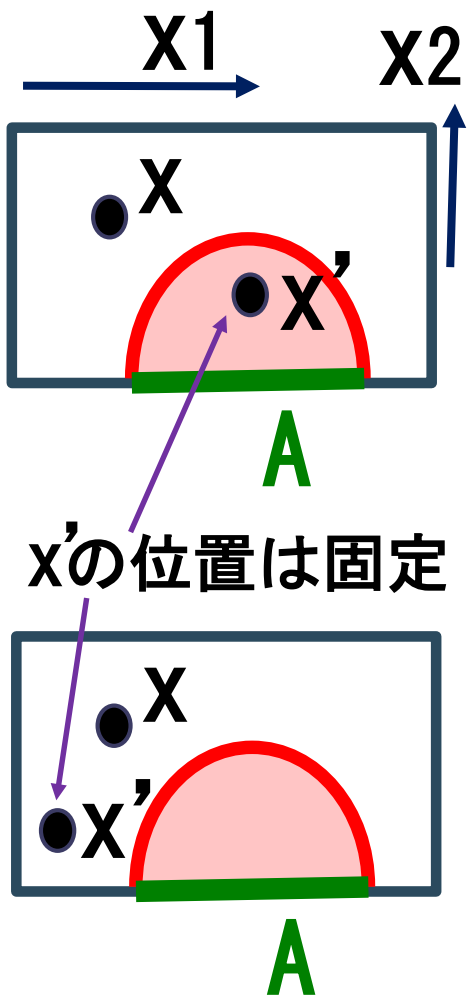
$$D_B(\rho, \rho')^2 = 2 - 2\text{Tr}[\sqrt{\sqrt{\rho}\rho'\sqrt{\rho}}].$$

忠実度 (Fidelity)

状態 ρ がパラメーター x に依存する場合 ($\rho(x)$) は、
ブレス計量 G_{ij} を次のように定義できる。

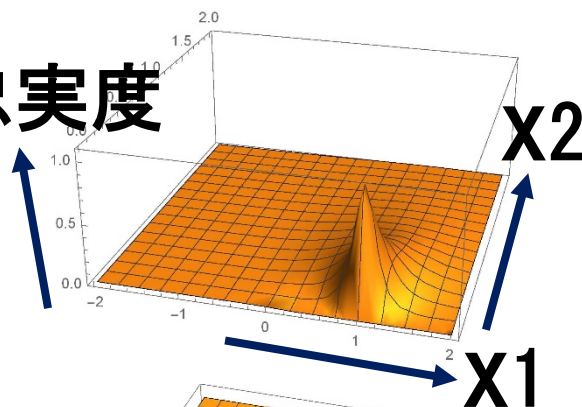
$$ds^2 \equiv D_B(\rho(x), \rho(x + dx))^2 \cong G_{ij} dx^i dx^j$$

情報距離(忠実度)のプロット(二次元CFT)



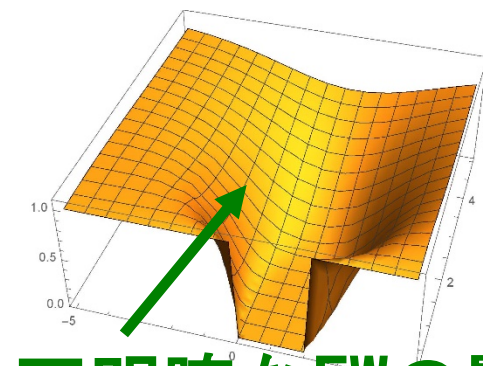
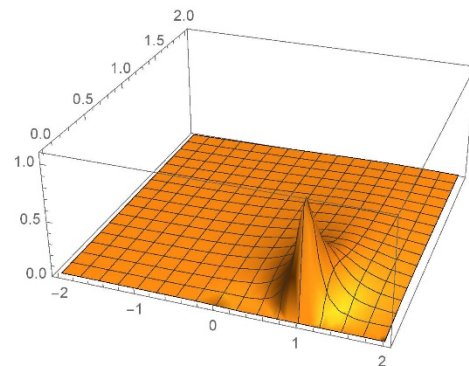
強結合のCFT
(一般相対論と等価)

忠実度



明瞭なEWの影!
(極小曲面と一致)

相互作用のない
自由スカラー場CFT



不明瞭なEWの影

ゲージ重力対応の予想通り, 強結合CFTのみEWの影を持つ!

情報計量

ブレス計量を計算すると点PがEW内にある場合は、

$$ds_B^2 = \frac{h}{(x_2)^2} (dx_1^2 + dx_2^2)$$

と、反ドジッター時空の時刻一定面の計量に比例することが分かる (h は演算子 $\mathcal{O}$ の共形次元)。

ゲージ重力対応

$\rho_A(x)$ の演算子挿入位置 x
の情報計量

=

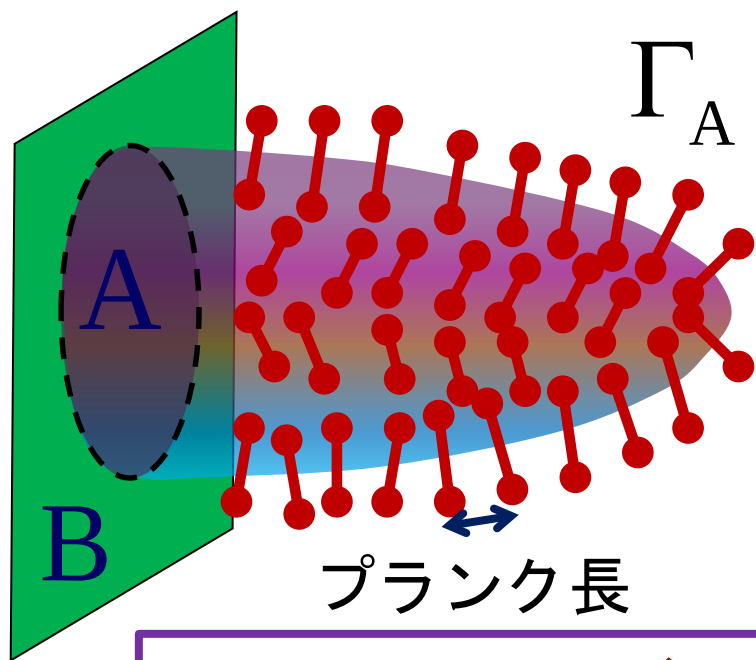
重力理論の時空の
時間一定面の計量



量子多体系の計算から曲がった空間の計量が創発する！

⑤量子ビットからの時空の創発

このエントロピー公式は、プランク面積あたり1量子ビットのエンタングルメントの存在を意味する。



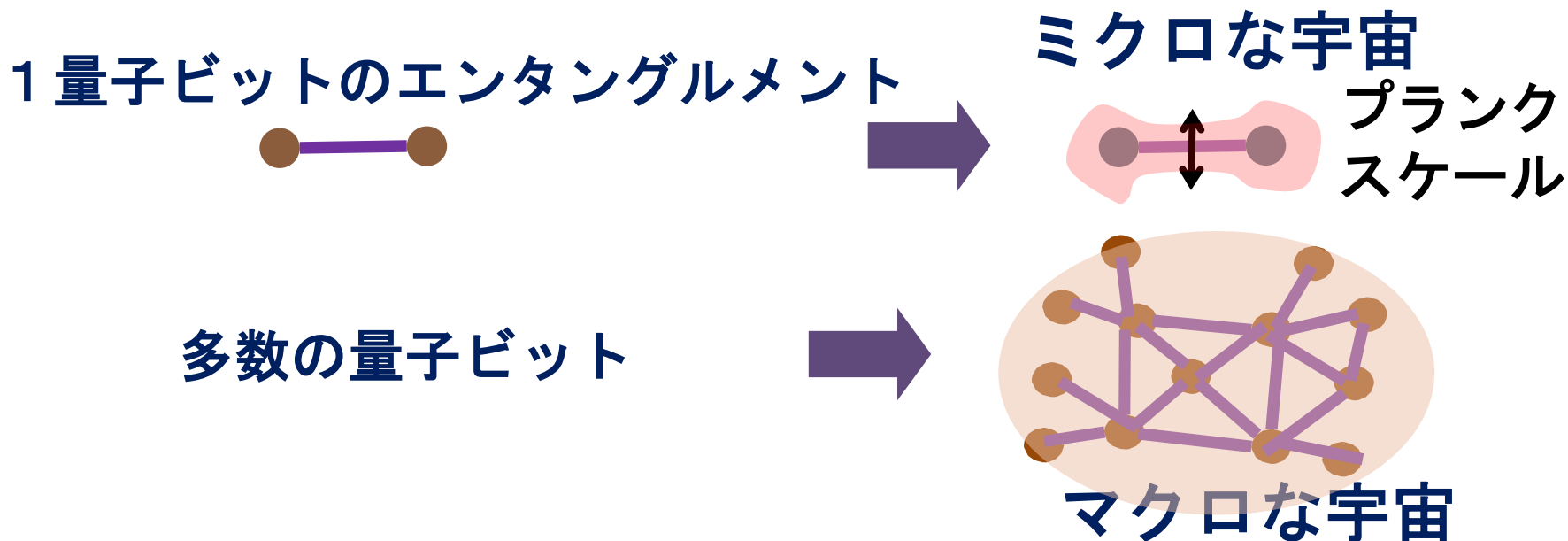
$$S_A = \frac{\Gamma_A \text{の面積}}{4 l_P^2}$$

プランク長: $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-35} m$

$\Rightarrow 1 cm^2$ の面積で 10^{65} 量子ビット

領域 A のサイズや位置を自由に変えられるので、量子ビットは時空全体に満ちているのでは？

このように、重力理論の時空が、量子ビットの集合体と解釈できることが示唆される。



➡ これを実現するモデルがテンソルネットワーク！

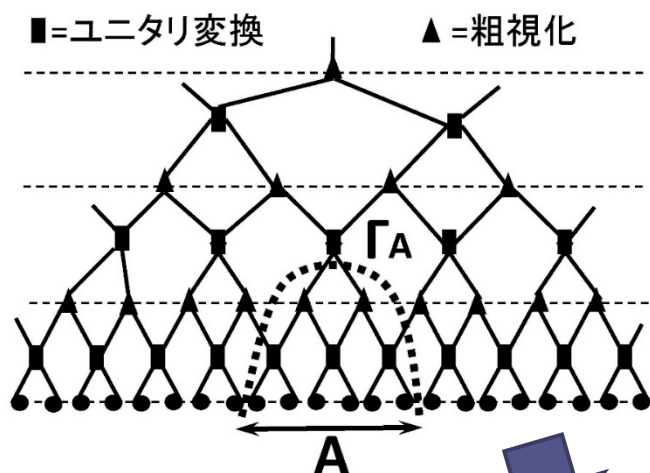
[Swingle 2009]

テンソルネットワークは量子状態を幾何学的に記述する手法。
量子多体系の数値計算で、変分法のansatzとして提案。

テンソルネットワークの例

例1: MERA [Vidal 2005]

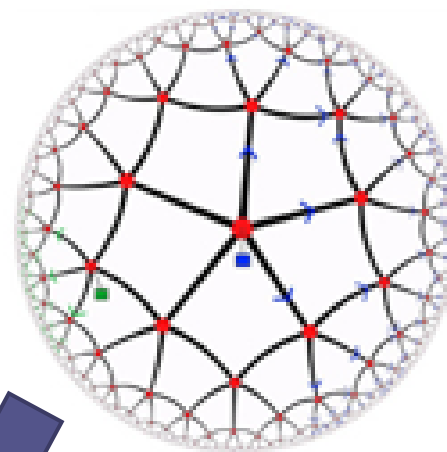
⇒ 量子臨界点 (CFT) の良い
変分法の波動関数



例2: HAPPY模型:

[Patawski-吉田-Harlow
-Preskill 2015]

⇒ 量子誤り訂正符号を
多数組み合わせた模型



量子ビットの幾何学構造 = 反ドジッター空間

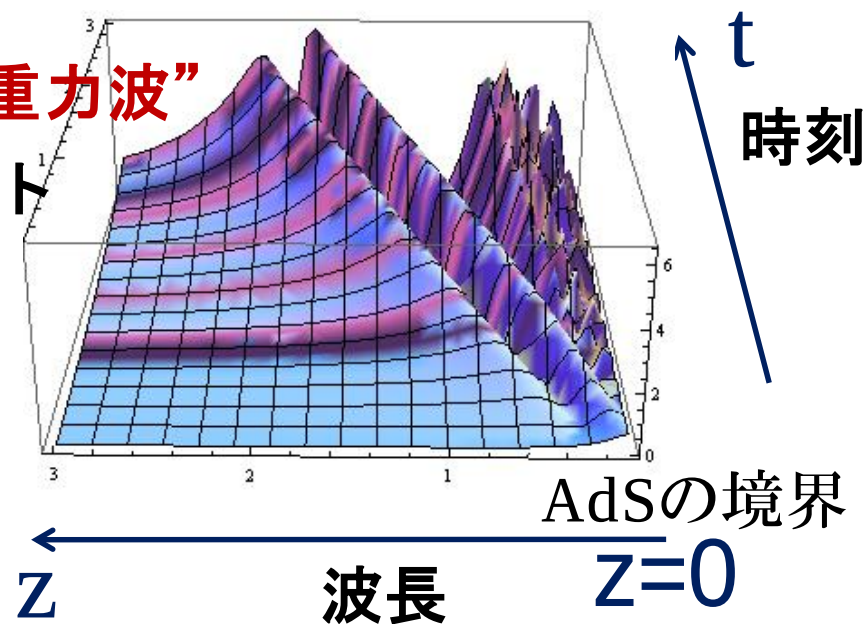
テンソルネットワークの連続極限（場の理論）？

手法1: cMERA (MERAの連続極限) [Haegeman-Osborne-Verschelde-Verstraete 2011]

cMERAの応用例：質量を急にゼロに変化させた後の時間発展（量子クエンチ）を解析。エンタングルメントの密度を「時間 t 」と「波長 z 」の関数として求めた。

エンタングルメントの波＝“重力波”

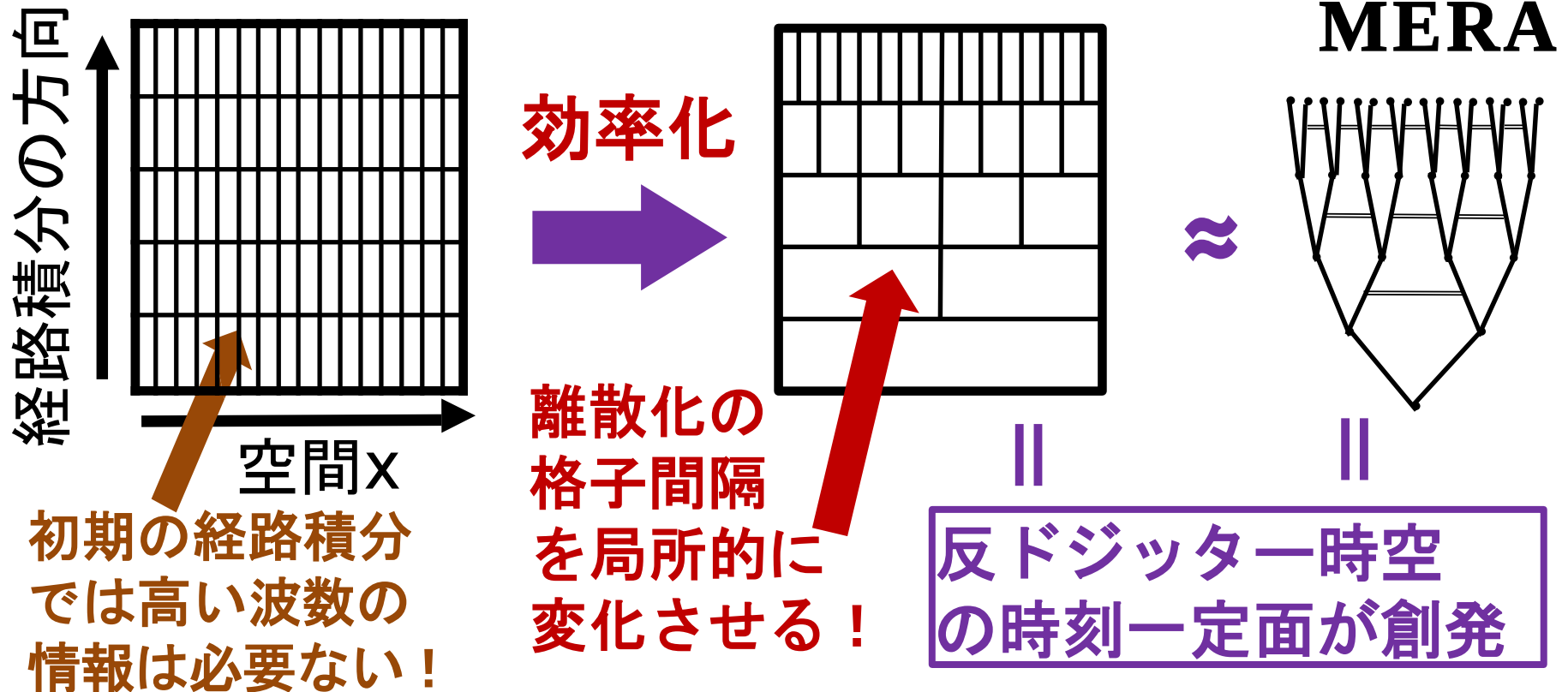
エンタングルメント
の密度



[Mol labashi-野崎-笠-高柳 2013]

テンソルネットワークを場の理論で扱う手法として次もある：
手法2: CFTの経路積分の効率化 [Caputa-Kundu-宮地-渡邊-高柳 2017]

同じ量子状態を表す経路積分の中で計算コストが最小なものを選ぶ！



経路積分の効率化を具体的にどうやるか？ [専門家向け]

離散化の格子間隔の局所的な変化を計量で表す：

$$ds^2 = e^{2\omega(x,z)} (dx^2 + dz^2).$$

CFTの性質より波動関数は次の性質を持つ：

$$\Psi[\phi, \omega] = e^{N[\omega]} \cdot \Psi[\phi, \omega = 0]$$

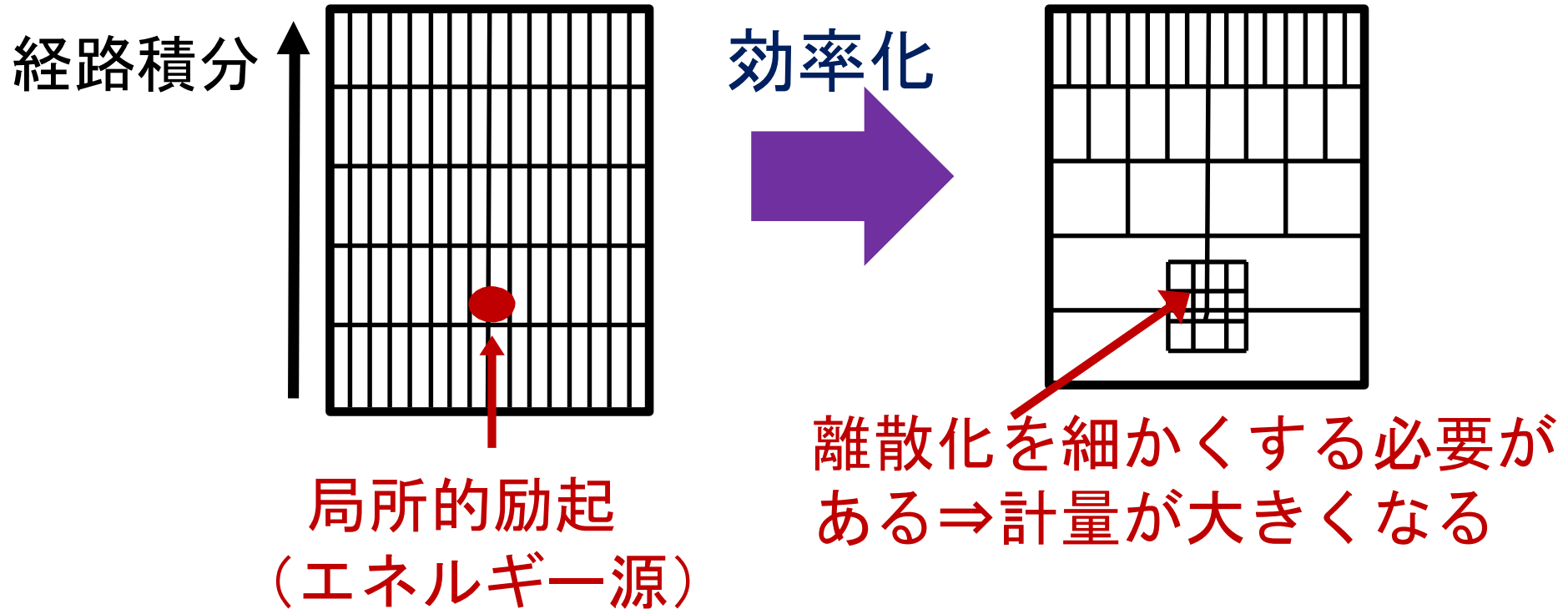
$N[\omega]$ を最小とする計量が最も効率的な経路積分。

(N = 「量子計算の複雑性」 の一種 [Cf. Susskind 2014-])

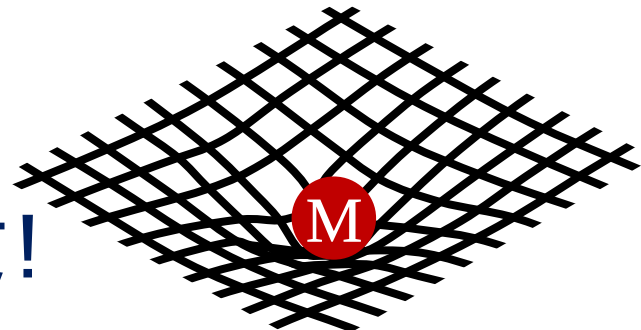
2次元CFTでは、 $N[\omega]$ はリュービル作用と等しい。

$$N_{2D}[\omega] = \frac{c}{24\pi} \int dx dz \left[(\partial_x \omega)^2 + (\partial_z \omega)^2 + e^{2\omega} \right]$$

励起状態に対する経路積分の効率化



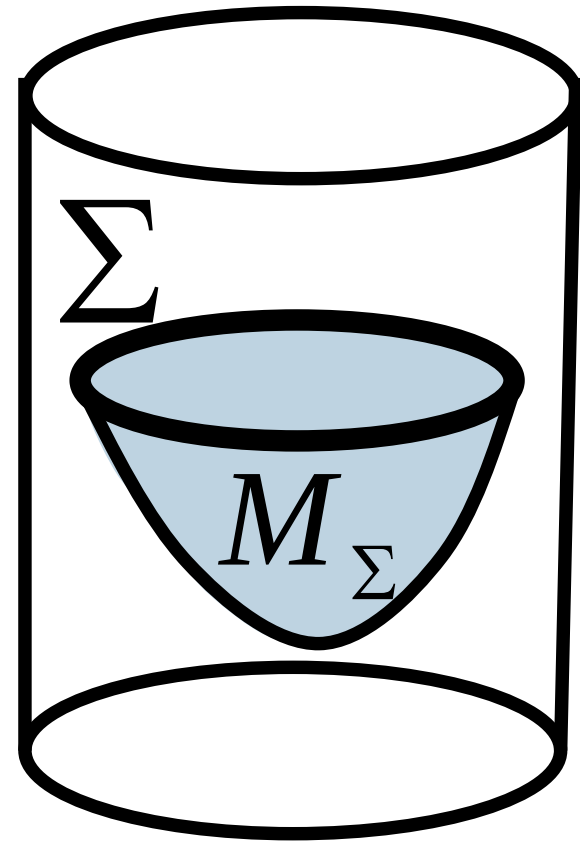
エネルギー源(=情報源)
が背景の時空を曲げる
⇒一般相対論の本質!



この定式化から得られる対応関係

余次元 1 曲面 M_Σ = ネットワーク
(量子回路)

余次元 2 曲面 Σ = 量子状態



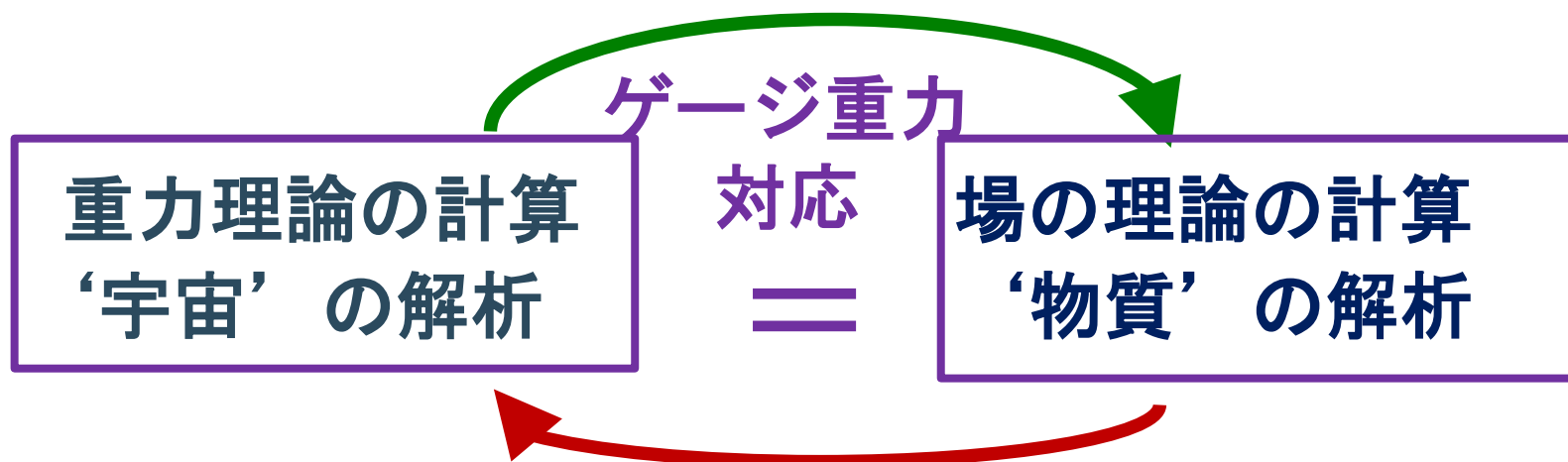
時空の幾何構造 = 量子エンタングルメントの構造

重力ダイナミクス = エンタングルメントの時間発展

⑥おわりに

本講演では、ブラックホール・エントロピーやゲージ重力対応から始まり、最近の話題である量子情報と重力理論の深い関わり合いを紹介した。

重力理論は(最速の)量子コンピューター？



重力理論の時空は量子ビットの集合体？

ごく最近の話題：BH情報問題へのEWの応用

[Pennington,
Almheiri et.al. 2019]

しかし、現在のところ‘宇宙’が宇宙定数が負である反ドジッター時空の場合しか扱えない。

より現実の宇宙ではむしろ宇宙定数は非負であると期待されることから、従来のゲージ重力対応を、例えばドジッター宇宙やビックバン宇宙などへ大きく拡張することが求められる。

その際に「重力理論を量子ビットの幾何学とみなす」という本講演で紹介させて頂いた新しいアプローチが重要な鍵となると期待される。

我々の研究グループの紹介



京大基礎物理学研究所(基研)



基研素粒子論グループ
(元気な大学院生を毎年募集)



当研究所開催の国際会議
It from Qubit School(今年6月)



高柳のグループの勉強会

ご清聴ありがとうございました！

量子重力の条件

大栗博司

Caltech & Kavli IPMU

仁科記念講演会 2019年12月6日

今日お話ししたいこと：

- ☆ 量子力学と一般相対性理論の統合は
難題だと言われるが、何が問題なのか。
- ☆ 超弦理論は、なぜ重要なのか。
- ☆ ホログラフィー原理とは何か。
- ☆ 量子重力について何がわかっていて、
何が分かっていないのか。

量子力学と 一般相対性理論の 統合は何が問題なのか

アインシュタインの重力理論：

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\Lambda + \frac{1}{G_N} \mathcal{R} + \text{matter} \right)$$


宇宙項 ニュートン定数 有限個の項

は、くりこみ可能でないので、
量子効果が計算できないと言われることがある。

これは正確ではない。

核物理学のパイオンの理論：

$$\mathcal{S} = \int d^4x \frac{(\partial \vec{\pi}(x))^2}{1 + \vec{\pi}(x)^2 / F^2}$$

も、くりこみ可能でないが、エネルギーや運動量が F [$\sim 184 \text{ MeV}$] よりも小さい現象については、量子効果も入れて計算が可能。

核物理学のパイオンの理論：

$$\mathcal{S} = \int d^4x \frac{(\partial \vec{\pi}(x))^2}{1 + \vec{\pi}(x)^2 / F^2}$$

観測可能量を、エネルギーや運動量で
べき展開した各次数の項は、有限個の
パラメータのくりこみで計算できる。



Kenneth G. Wilson (1936 - 2013)

ウィルソン (Kenneth Wilson) 流の考え方：

パイオンの理論は QCD の低エネルギー近似。

QCD の経路積分をするときに、低エネルギーの自由度であるパイオン場だけは積分しない。

⇒ **有効理論**

くりこみ可能でなくても、量子効果も含めた予言ができて、実験的にも検証されている。

アインシュタインの重力理論も有効理論：

パイオン理論と同じで、エネルギーや運動量がカットオフ（より基本的な理論が必要になる閾値）より小さければ、信頼できる予言ができる。

例えば：☆ ブラックホールのホーキング輻射

☆ インフレーション宇宙の量子効果の
CMBのゆらぎへの影響

☆ ニュートン・ポテンシャルへの補正

$$V = -\frac{G_N m_1 m_2}{r} \left(1 + 3 \frac{G_N (m_1 + m_2)}{r} + \frac{41}{10\pi^2} \frac{G_N \hbar}{r^2} + \dots \right)$$

相対論効果

量子効果

**ウィルソン流の
くりこみ理論は、
重力理論に使えるのか？**

Gravity is Different

物理学的世界には階層構造があり、
短距離世界 = 高エネルギー世界の探究が、
自然界の基本法則が明らかになってきた。

この階層構造は、量子重力の完成で完結する。

ブラックホールでは **高エネルギー = 長距離**。

Gravity is Different

この階層構造は、量子重力の完成で完結する。

ブラックホールでは 高エネルギー = 長距離。

スケールによる自由度の分離が働かない。

**低エネルギー有効理論が、高エネルギーで
整合性のある理論に昇華できるとは限らない。**

Gravity is Different

低エネルギー有効理論が、高エネルギーで
整合性のある理論に昇華できるとは限らない。

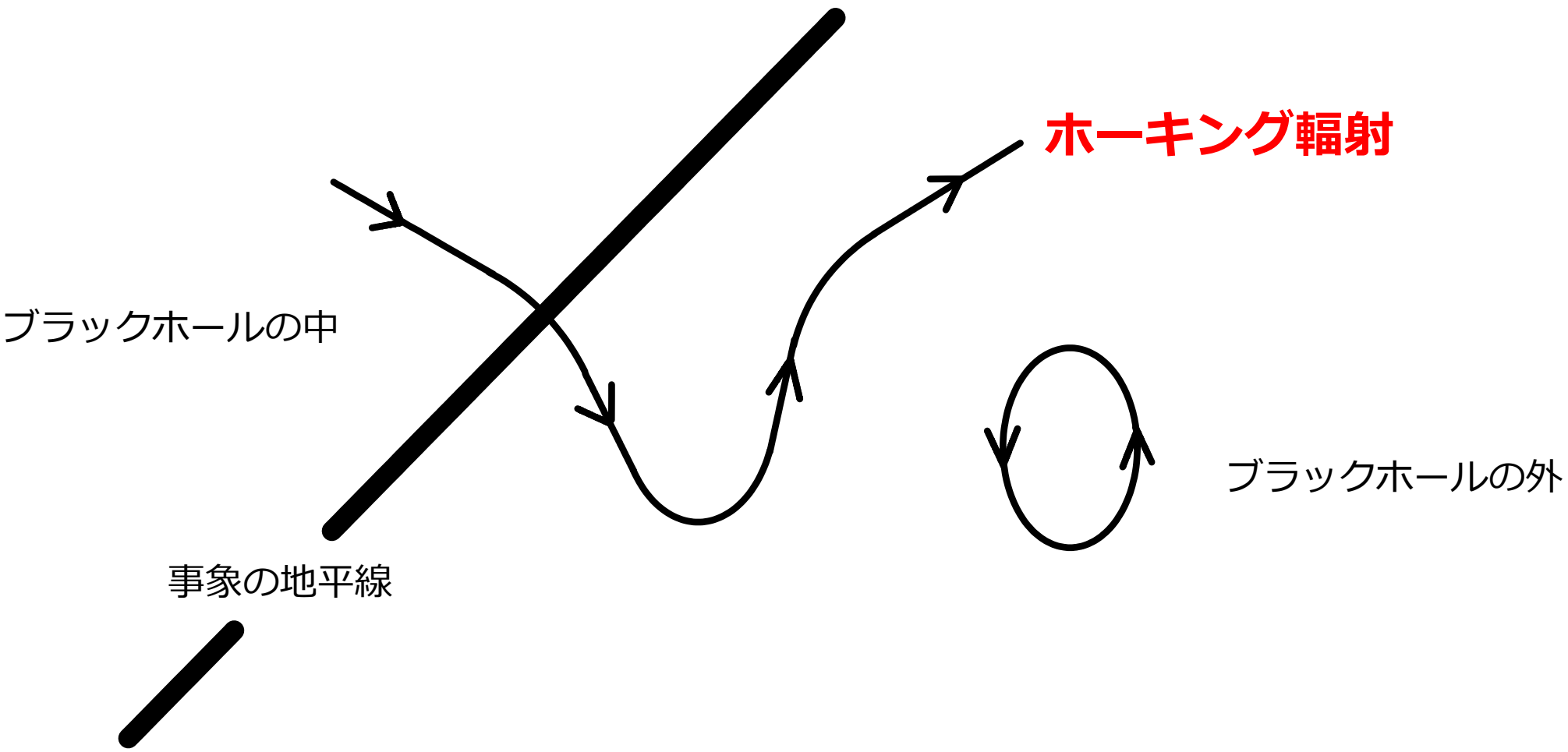
スワンブランド

ブラックホールの謎と ホログラフィー原理

Stephen Hawking

(1942 - 2018)





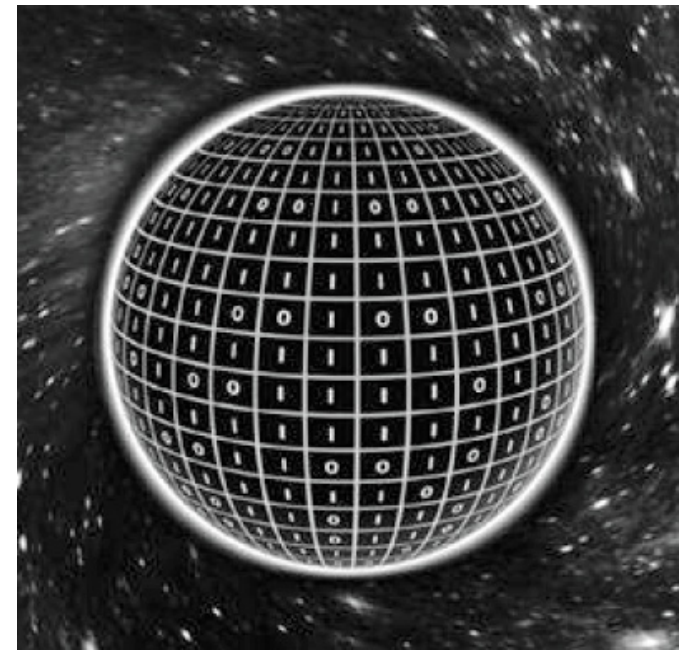
$$S = \frac{1}{4G_N} (\text{地平線の表面積})$$

エントロピーは示量変数。

表面積に比例するのはなぜか。

ホログラフィー原理

量子重力理論の基本的な自由度は、
時空間の領域を包む表面に定義できる。



ホログラフィー原理は、超弦理論において実現している。

超弦理論においてホログラフィー原理がどのように実現されているのかを説明するために、ちょっと準備をします。

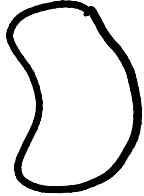
超弦理論においてホログラフィー原理がどのように実現されているのかを説明するために、ちょっと準備をします。

D-Branes

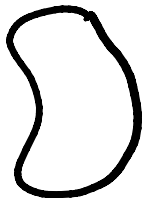


Joseph Polchinski
(1954 - 2018)

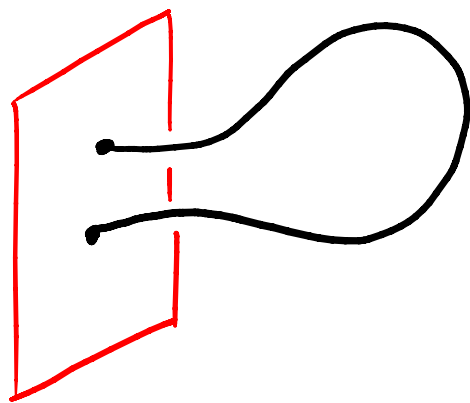
超弦理論においてホログラフィー原理がどのように実現されているのかを説明するために、ちょっと準備をします。

弦には 閉じたもの  と 開いたもの  がある。

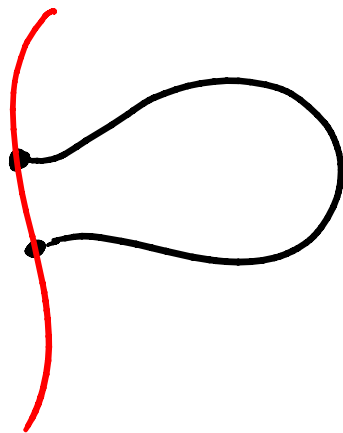
超弦理論においてホログラフィー原理がどのように実現されているのかを説明するために、ちょっと準備をします。

弦には 閉じたもの  と 開いたもの  がある。

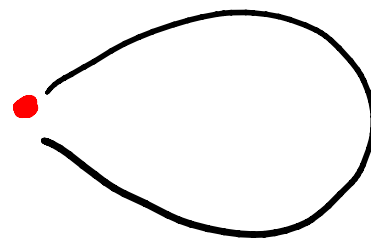
開いた弦の端点は 部分空間に制限されてもよい。



面

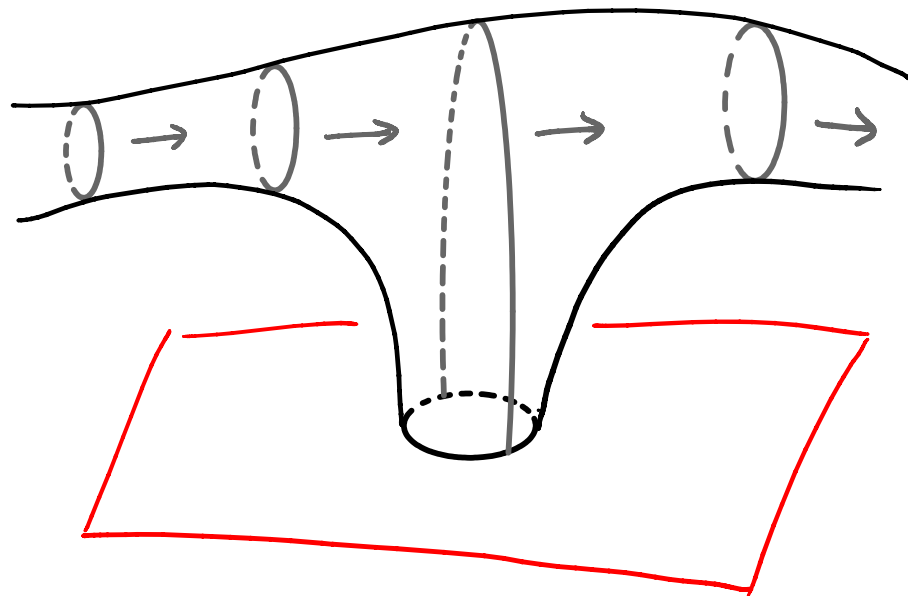


線



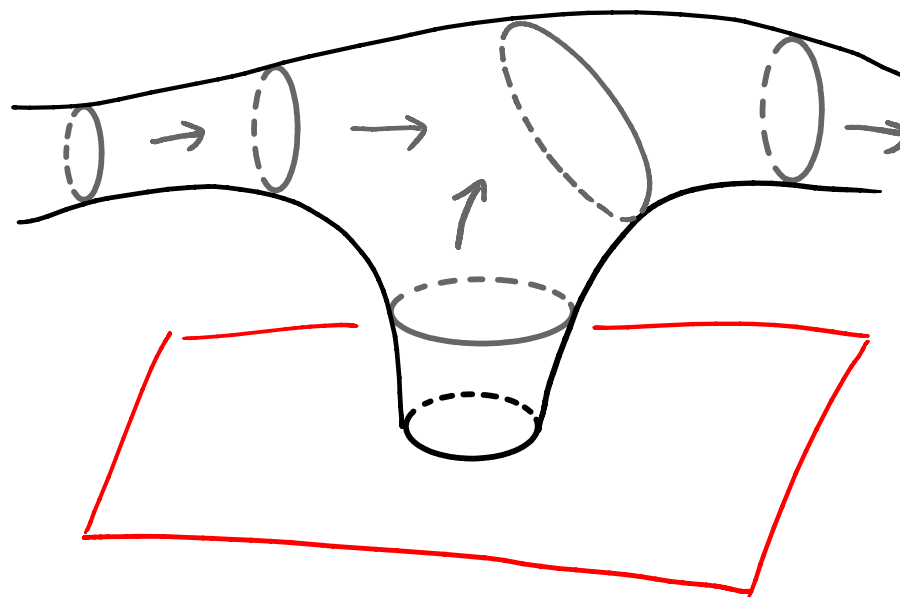
点

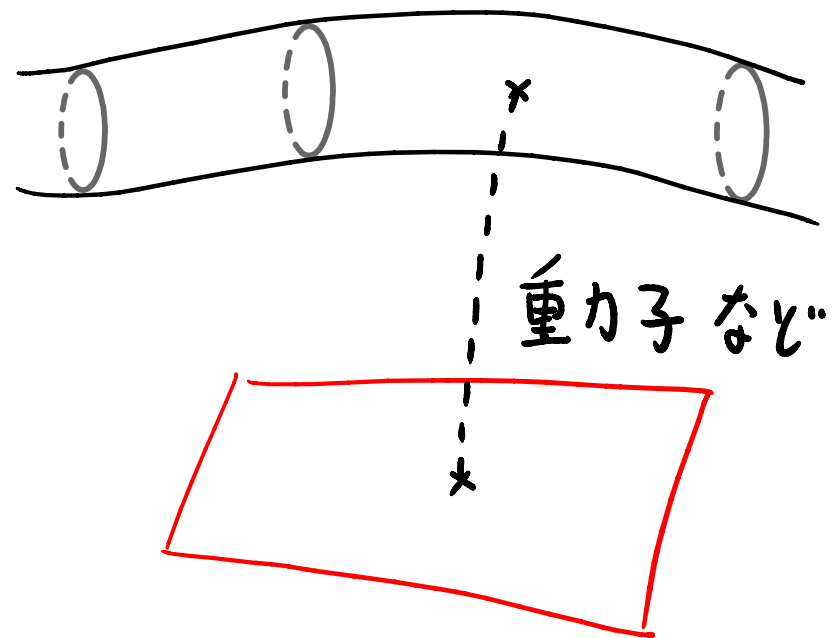
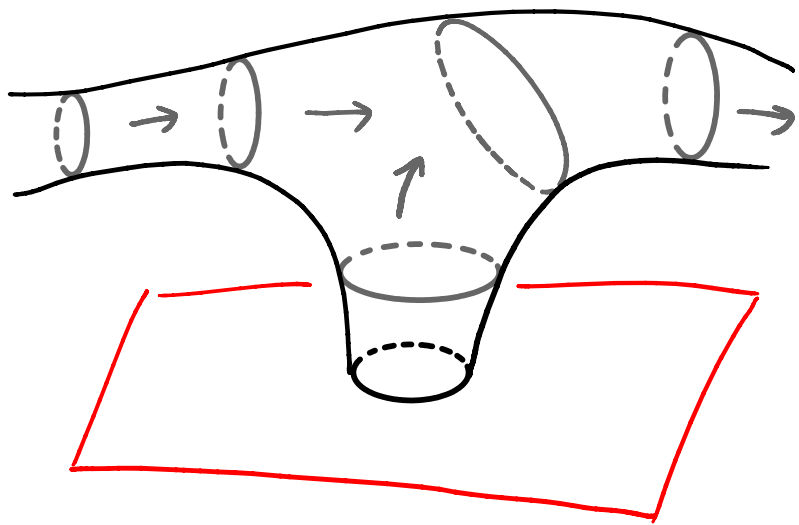
これらの部分空間は、質量を持ち、重力を発する。



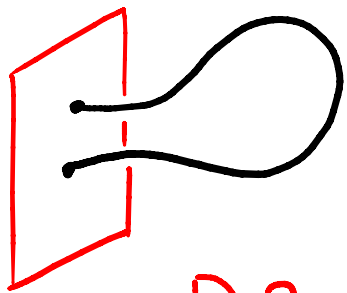
開いた弦の端点が部分空間にあるということは、

部分空間が閉じた弦を
放出・吸収するということ。

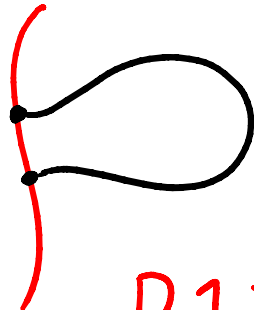




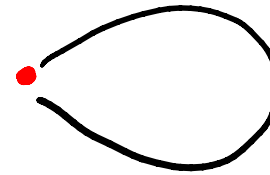
重力子も閉じた弦の状態。部分空間が閉じた弦を放出・吸収
 できるということは、そこに**質量などが分布している**ということ。



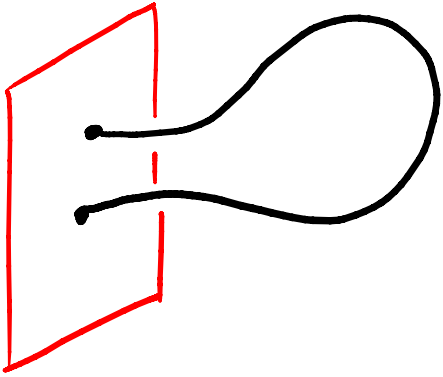
D2 ブレーン



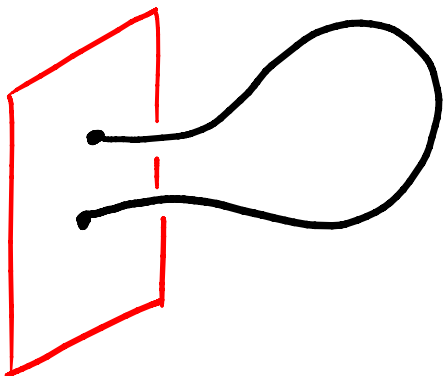
D1 ブレーン



D0 ブレーン



D ブレーンには質量が集中しているので、
重力が強ければブラックホールになる。



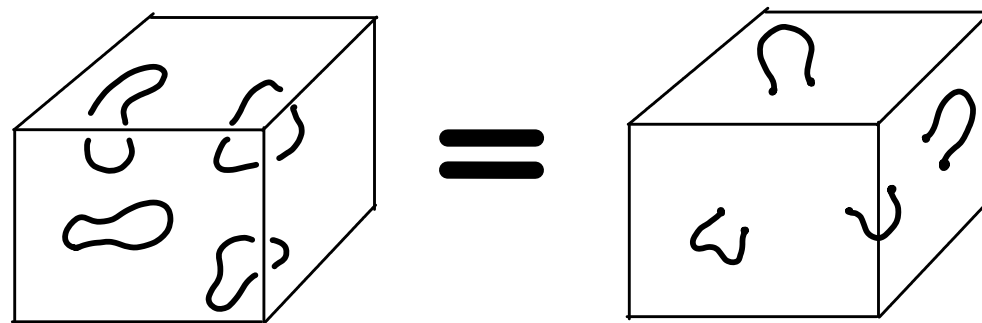
D ブレーンには質量が集中しているので、
重力が強ければブラックホールになる。

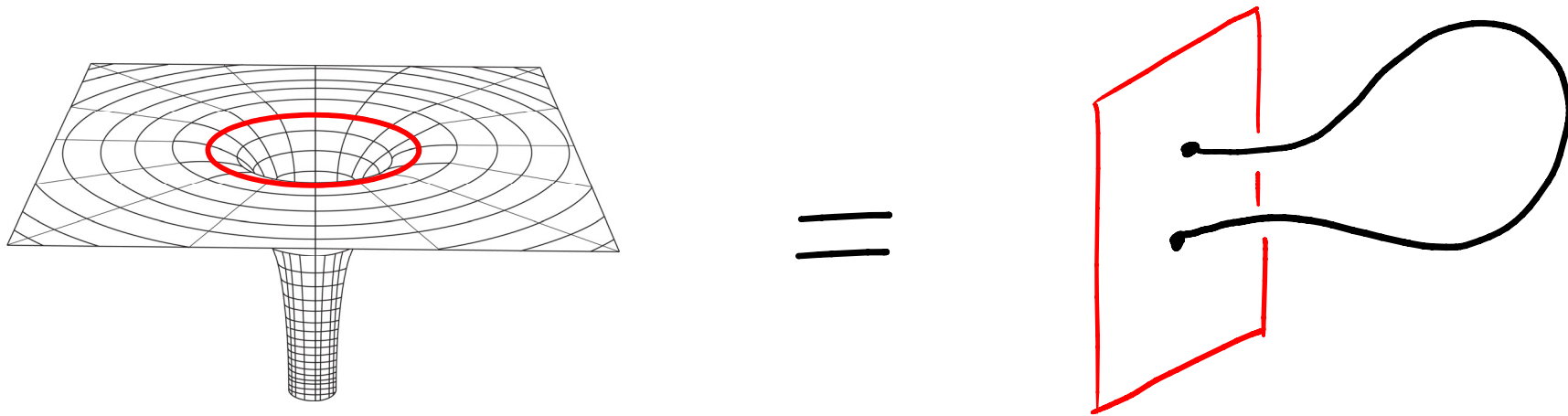
開いた弦を量子化して、ヒルベルト空間を構成すれば、
ブラックホールの量子状態数を数えることができる。

この計算が厳密にできる場合には、

$$S = \frac{1}{4G_N} (\text{地平線の表面積})$$

が再現されている。





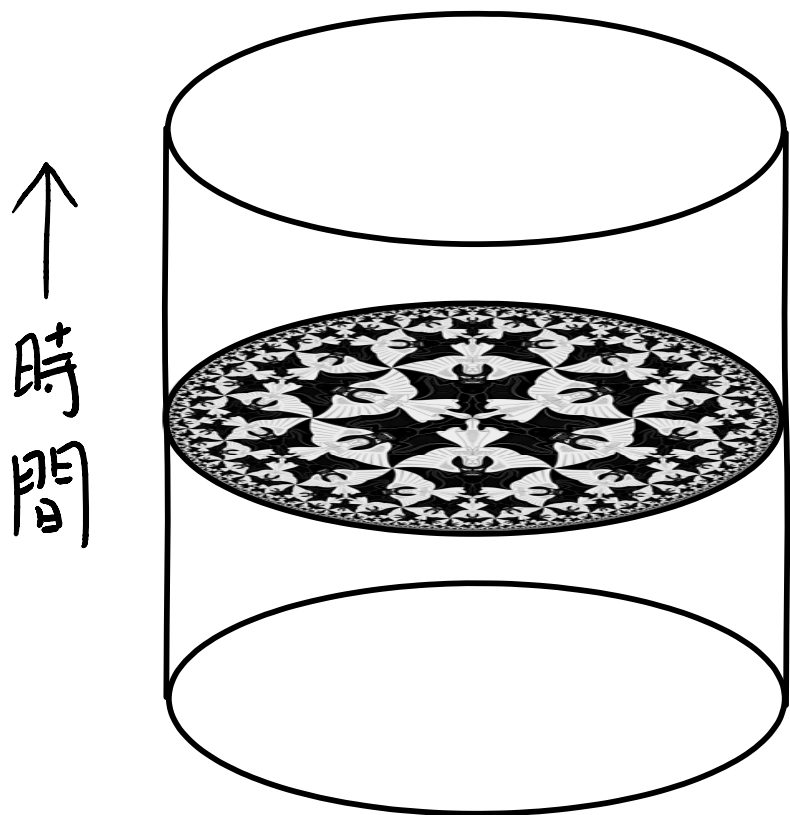
ブラックホールの事象の地平線の物理現象は、
対応する D ブレーンの**開いた弦**の量子論で理解できる。

⇒ 開いた弦の量子論には、重力の自由度は含まれない。

⇒ 重力現象が、重力を含まない理論、
しかも、地平線に局在した理論で記述できる。

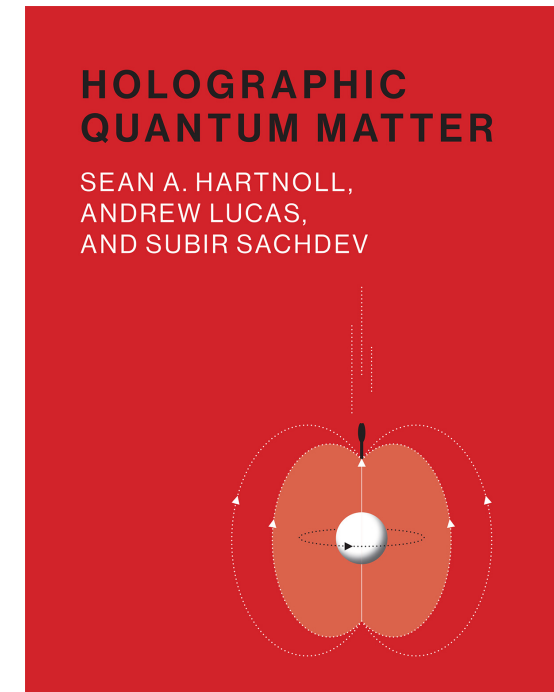
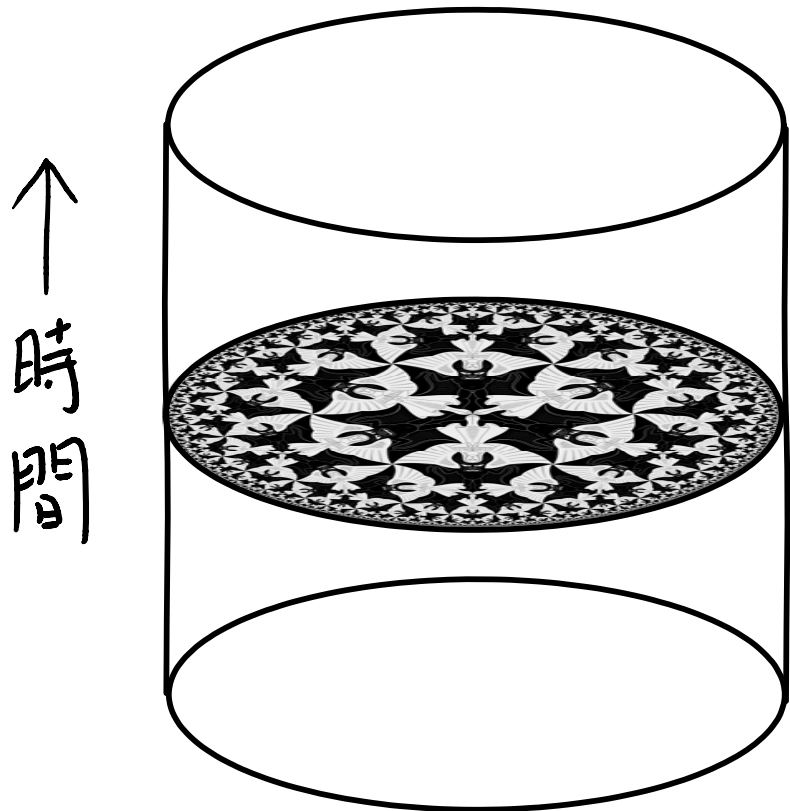
Maldacena の AdS/CFT 対応：

反ドジッター時空間 (AdS) の重力理論は、
その無限遠の境界に置かれた
共形場の理論 (CFT) と等価である。



ブラックホールがホーキング輻射で
蒸発していく様子も、共形場の理論
では、ユニタリーな時間発展となる
(情報問題の原理的解決)。

AdS/CFT 対応は、
非摂動的効果も含め辻褃の合う
量子重力の完結した理論模型。



物性物理やハドロン物理への応用も
重要であるが、今回は議論しない。

ホログラフィー原理が示唆する、
量子重力への新しい知見を解説する。

量子もつれと

時空の幾何

量子もつれ

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

$\mathcal{H}_A = \{ |0\rangle_A, |1\rangle_A \}$, $\mathcal{H}_B = \{ |0\rangle_B, |1\rangle_B \}$ として $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ の中で

$\left\{ \begin{array}{l} |0\rangle_A |0\rangle_B : \text{もつれがない。} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} |\underline{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B) \text{ もつれている。} \end{array} \right.$

量子もつれ

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

$\mathcal{H}_A = \{ |0\rangle_A, |1\rangle_A \}$, $\mathcal{H}_B = \{ |0\rangle_B, |1\rangle_B \}$ として $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ の中で

$\begin{cases} |0\rangle_A |0\rangle_B & : \text{もつれがない。} \end{cases}$

$\begin{cases} |EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B) & \text{もつれている。} \end{cases}$

エンタングルメント・エントロピー：量子もつれの定量化

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ について, $\rho_A = \text{tr}_{\mathcal{H}_B} (|\psi\rangle\langle\psi|)$ とし,

$$S(|\psi\rangle) = - \text{tr}_{\mathcal{H}_A} (\rho_A \log_2 \rho_A)$$

↑
A と B について
対称

$$= \begin{cases} 0 & (|\psi\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B \text{ のとき}) \\ 1 & (|\psi\rangle = |EPR\rangle \text{ のとき}) \end{cases}$$

量子もつれ

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

エンタングルメント・エントロピー：量子もつれの定量化

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ について, $\rho_A = \text{tr}_{\mathcal{H}_B} (|\psi\rangle\langle\psi|)$ とし,

$$S(|\psi\rangle) = - \text{tr}_{\mathcal{H}_A} (\rho_A \log_2 \rho_A)$$

$$= \begin{cases} 0 & (|\psi\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B \text{ のとき}) \\ 1 & (|\psi\rangle = |\text{EPR}\rangle \text{ のとき}) \end{cases}$$

$|\psi\rangle$ からどれだけの EPR ペアを取り出せるかのめやす:

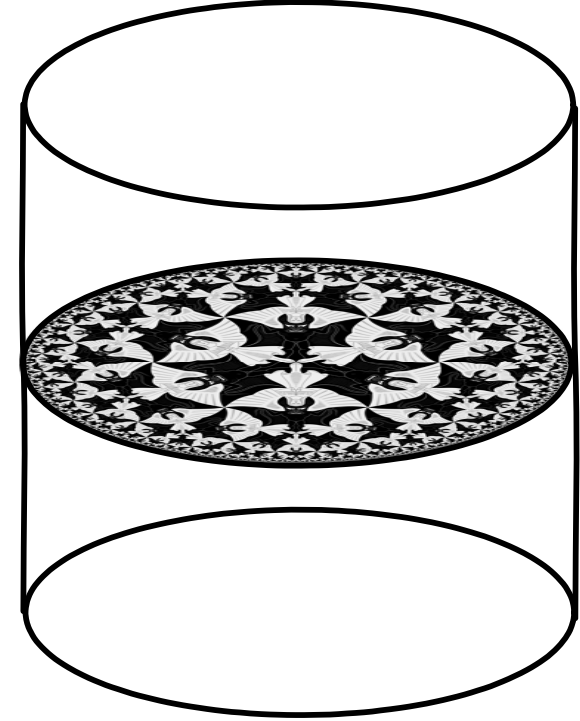
$$|\psi\rangle^{\otimes n} \iff |\text{EPR}\rangle^{\otimes \lfloor n \times S(|\psi\rangle) \rfloor} \leftarrow \text{整数部分}$$



局所操作と古典通信 (LOCC)

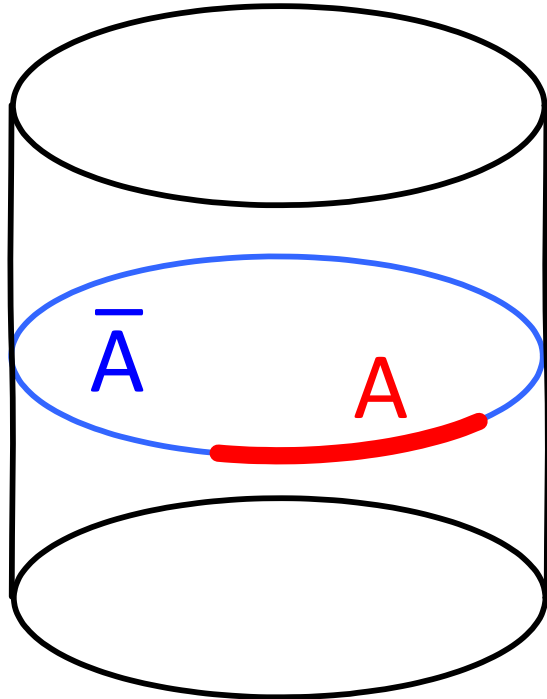
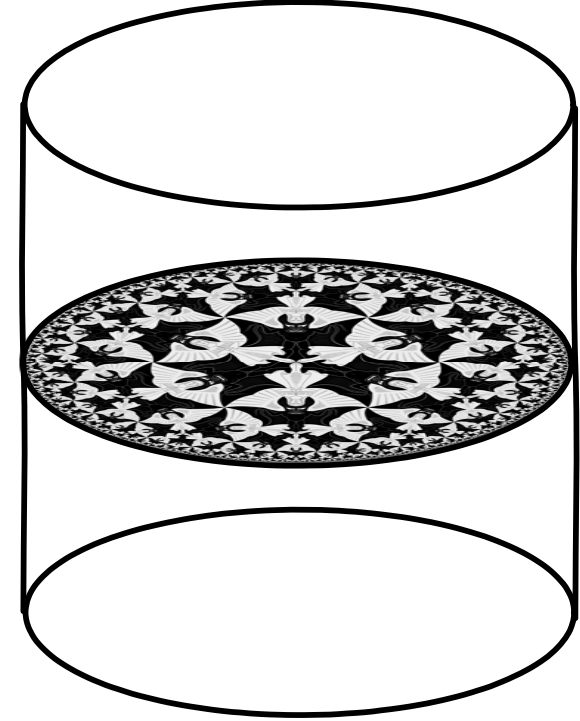
AdS/CFT 対応：

反ドジッター時空間の重力理論は、
その無限遠の境界に置かれた
共形場の理論 (CFT) と等価である。



AdS/CFT 対応：

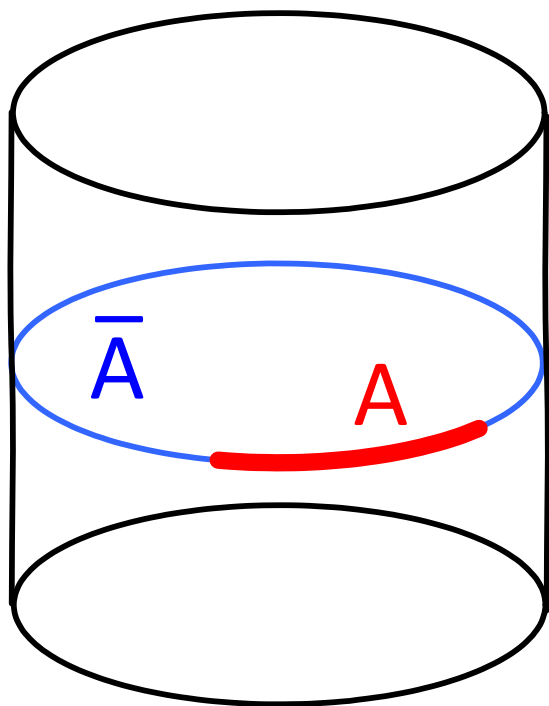
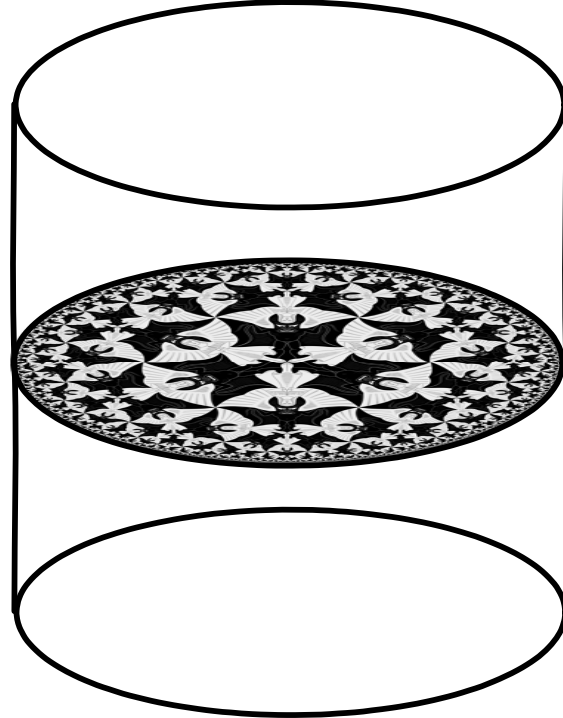
反ドジッター時空間の重力理論は、
その無限遠の境界に置かれた
共形場の理論 (CFT) と等価である。



CFT のヒルベルト空間は、
空間の部分領域 A の上のヒルベルト空間と、
残りの空間 $\bar{A}$ の上のヒルベルト空間の
直積に分解される。

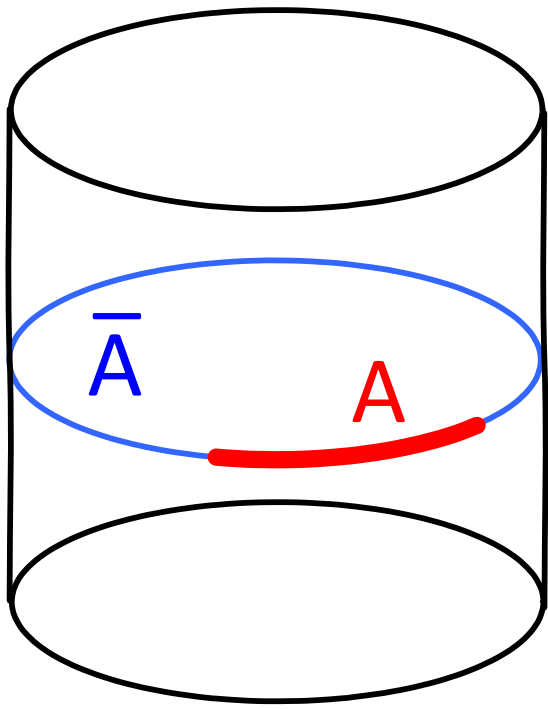
AdS/CFT 対応：

反ドジッター時空間の重力理論は、
その無限遠の境界に置かれた
共形場の理論 (CFT) と等価である。



CFT のヒルベルト空間は、
空間の部分領域 A の  のヒルベルト空間と、
残りの空間 $\bar{A}$ の上のヒルベルト空間の
直積に分解される。

富田-竹崎理論の呪文を唱えれば大丈夫



CFT のヒルベルト空間は、
空間の部分領域 **A** の上のヒルベルト空間と、
残りの空間 **$\bar{A}$** の上のヒルベルト空間の
直積に分解される。

CFT の 状態 $|\psi\rangle$ について、

A と **$\bar{A}$** の もつれ を 測 る

$$\rho(|\psi\rangle) = \text{tr}_{\mathcal{H}_{\bar{A}}}(|\psi\rangle\langle\psi|)$$

$$S(|\psi\rangle) = -\text{tr}_{\mathcal{H}_A}(\rho \log_e \rho)$$

A と $\bar{A}$ について
対称、

↑
自然対数。

エンタングルメント・エントロピーの笠-高柳公式

PRL 96, 181602 (2006)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
12 MAY 2006

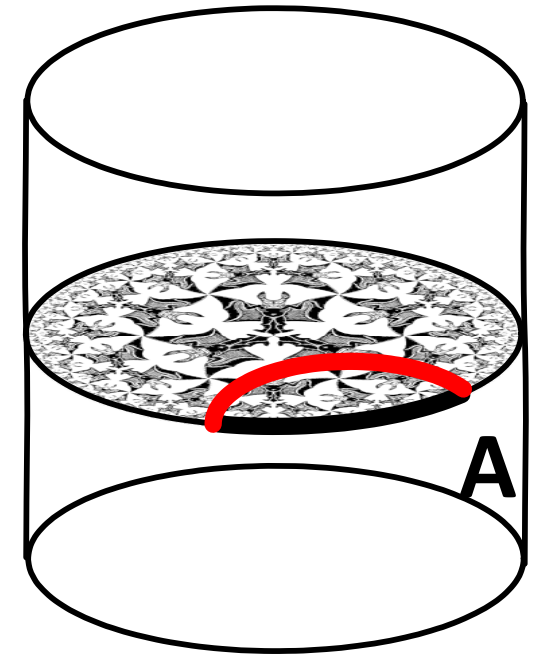
Holographic Derivation of Entanglement Entropy from the anti-de Sitter Space/Conformal Field Theory Correspondence

Shinsei Ryu and Tadashi Takayanagi

Kavli Institute for Theoretical Physics, University of California, Santa Barbara, California 93106, USA
(Received 8 March 2006; published 9 May 2006)

$$\rho(|\psi\rangle) = \text{tr}_{\mathcal{H}_{\bar{A}}}(|\psi\rangle\langle\psi|)$$

$$S(|\psi\rangle) = -\text{tr}_{\mathcal{H}_A}(\rho \log_e \rho)$$



撮影：早野龍五

$$= \frac{1}{4G_N} \left(A \text{ を包む} \right. \\ \left. \text{極小曲面の面積} \right)$$

↑ ニュートン定数

量子もつれによる時空間の再構成

場の量子論の有限温度の状態は、量子もつれ状態とみなせる。

$$\text{Thermo Field Double : } |TFD\rangle \sim \sum_i e^{-\frac{E_i}{2kT}} |i\rangle_A |i\rangle_B$$

$$\text{tr}_B |TFD\rangle \langle TFD| \sim \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}} |i\rangle_A \langle i|_A$$

温度 T が高いほど、量子もつれは大きい。

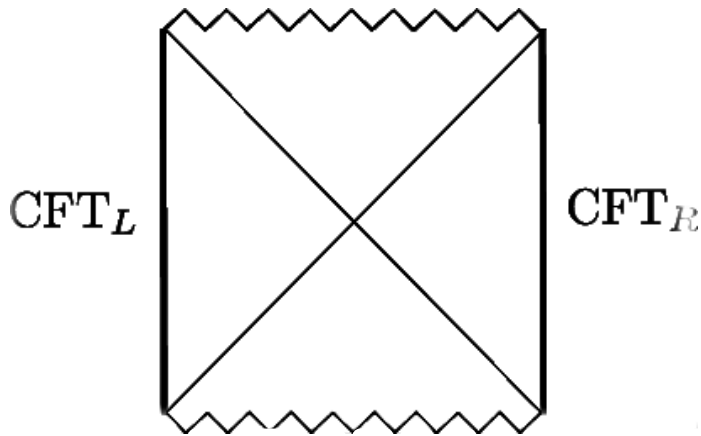
$$T \rightarrow 0 : |TFD\rangle \sim |0\rangle_A |0\rangle_B$$

$$T \rightarrow \infty : |TFD\rangle \sim \sum_{E_i \ll kT} |i\rangle_A |i\rangle_B + \dots$$

量子もつれによる時空間の再構成

場の量子論の有限温度の状態は、
量子もつれ状態とみなせる。

$$\sum_i e^{-\frac{E_i}{2kT}} |i\rangle_A |i\rangle_B$$



AdS の重力理論では、有限温度の
状態はブラックホールと解釈される。

有限温度のCFT のエンタングルメントの強さ

(すなわち **EPR ペアの数**) は、AdS ブラックホールの

Einstein-Rosen 橋 (ワームホール) の太さに比例する。

量子もつれによる時空間の再構成

有限温度のCFT のエンタングルメントの強さ

(すなわち **EPR ペアの数**) は、AdS ブラックホールの
Einstein-Rosen 橋 (ワームホール) の太さに比例する。

MAY 15, 1935

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*
(Received March 25, 1935)

JULY 1, 1935

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 48

The Particle Problem in the General Theory of Relativity

A. EINSTEIN AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton*
(Received May 8, 1935)

Fortschr. Phys. **61**, No. 9, 781 – 811 (2013) / DOI 10.1002/prop.201300020

ER = EPR ?

Cool horizons for entangled black holes

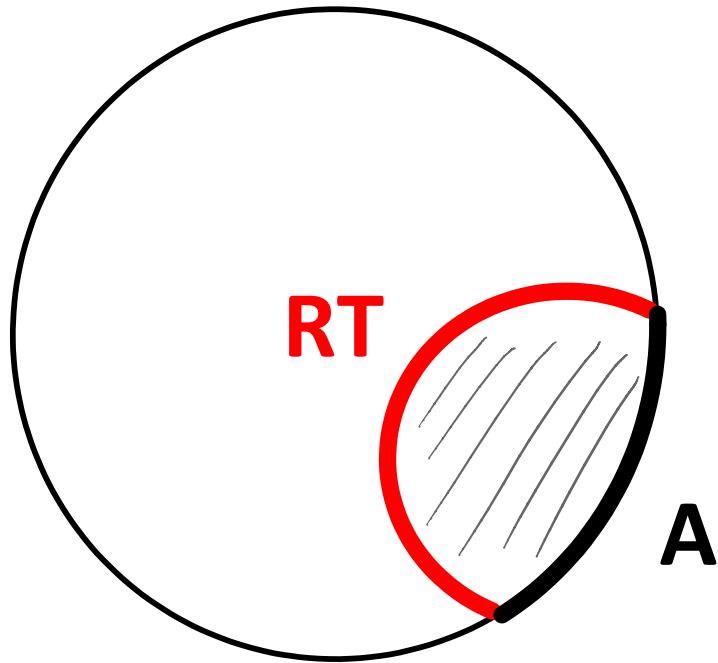
Juan Maldacena^{1,*} and Leonard Susskind²

¹ Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA

² Stanford Institute for Theoretical Physics and Department of Physics, Stanford University, Stanford, CA 94305-4060, USA

量子もつれによる時空間の再構成

部分領域 **A** と 笠-高柳の極小局面 **RT** 囲まれた**斜線の領域**を考える。



斜線の部分に局在した

AdS の量子重力の作用素は、

部分領域 **A** に局在した

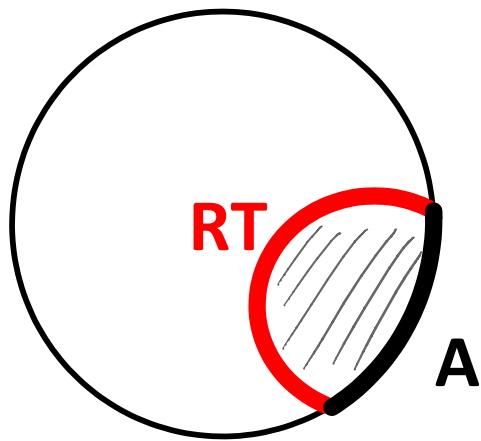
CFT の作用素に対応する。

Hamilton, Kabat, Lifschytz, Lowe: hep-th/0606141

Papadodimas, Raju: 1310.6335

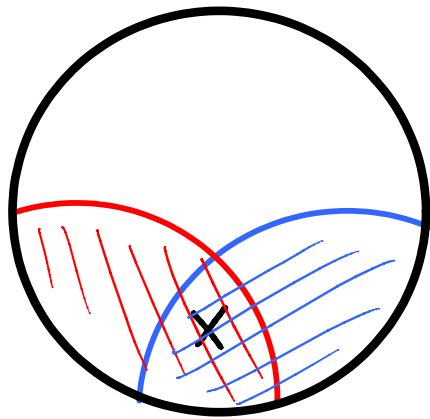
Headrick, Hubeny, Lawrence, Rangamani: 1408.6300

Almheiri, Dong, Harlow: 1411.7041, Dong, Harlow, Wall: 1601.05416

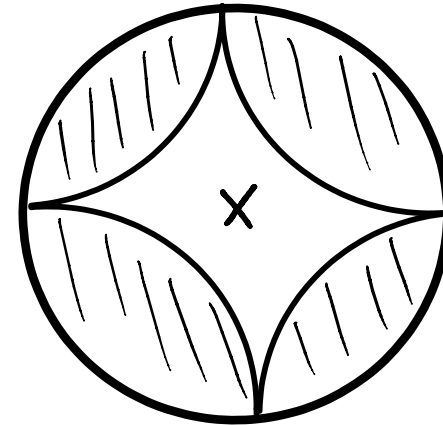


斜線の部分に局在した AdS の量子重力の作用素は、
部分領域 **A** に局在した CFT の作用素に対応する。

⇒ **再構成のパラドックス**

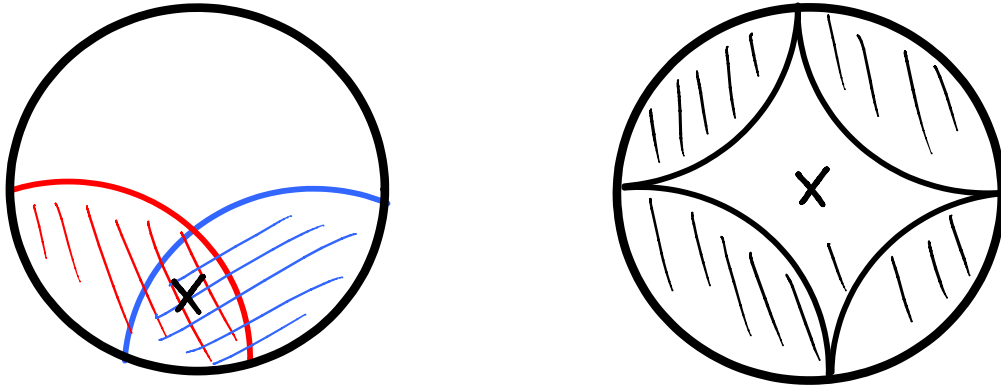


異なる部分空間に局在した CFT の
作用素が、AdS の同じ局所作用素に
対応する：**作用素の一意性？**



AdS の局所作用素は、CFT の
すべての局所作用素と可換である：
ワイトマンの公理と矛盾？

量子誤り訂正符号との関係



Almheiri, Dong, Harlow: 1411.7041
Harlow: 1607.03901

AdS の量子重力の局所的な励起状態は、CFT において
特別なタイプの量子もつれを持つ状態に対応する。

CFT の異なる部分空間が「量子秘密鍵」を共有しており、
その量子もつれは「量子誤り訂正符号」と同じタイプ。

量子もつれの

重力理論への応用

スワンブランド問題

超弦理論のように整合性のある
量子重力理論の低エネルギー有効理論は
どのように特徴づけられるか。

Vafa, hep-th/0509212
Vafa + Ooguri, hep-th/0605264

対称性への制限

対称性は物理学にとって重要な概念である。

自然界の基本法則を発見し、
それを定式化するのに使われる。

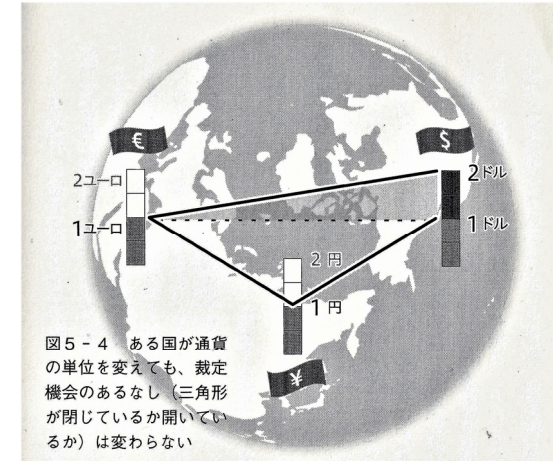
基本法則から、さまざまな現象を
説明するのにつかわれる。

物理法則の対称性には **2種類**ある

ゲージ対称性：

物理的状态は不変。

理論を表現するときの冗長性の反映。



通貨の単位の変化は、価値の表現の冗長性の反映。

(『超弦理論入門』(ブルーバックス)より)

グローバル対称性：

対称性の作用を起こす作用素がある。

物理的状态に非自明に作用する。

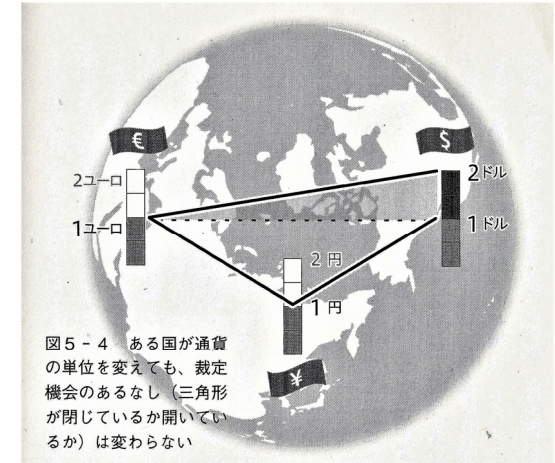


物理法則の対称性には2種類ある

ゲージ対称性：

物理的状态は不変。

理論を表現するときの冗長性の反映。



通貨の単位の変化は、価値の表現の冗長性の反映。

（『超弦理論入門』（ブルーバックス）より）

異なるゲージ対称性を持つ異なるラグランジアンが
同一の物理系を記述することがある。

デュアリティ（双対性）

ゲージ対称性は一意的に決まるものではない。

物理法則の対称性には2種類ある

グローバル対称性：

対称性の作用を起こす作用素がある。

物理的状态に非自明に作用する。



**グローバル対称性は、物理系の記述法によらず
一意的に定義できる。**

物理法則の対称性には2種類ある

グローバル対称性：

対称性の作用を起こす作用素がある。

物理的状态に非自明に作用する。



グローバル対称性は、物理系の記述法によらず一意的に定義できる。

Banks, Dixon (1988); ... ;

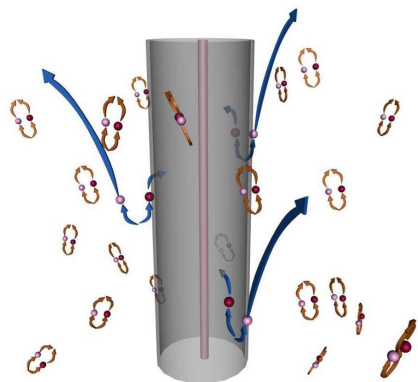
Banks, Seiberg: 1011.5120; ...

しかし、整合性のある量子重力理論は

グローバルな対称性を持ってないとの予想があった。

量子重力理論はグローバル対称性を持たない

これまでの議論：



グローバル対称性 G があるとして。

電荷を持つ粒子を十分たくさん集めれば、

任意の規約表現のブラックホールができる。

このブラックホールをホーキング蒸発させる。

ホーキング放射はグローバル対称性の電荷を運ばない。

⇒ **グローバル対称性の表現は保たれる。**

ついには、ブラックホールのエントロピーから期待される

ヒルベルト空間の次元が、対称性の規約表現の次元より小さくなる。

⇒ **矛盾**

量子重力理論はグローバル対称性を持たない

Harlowと私は、この主張をAdS/CFT対応によって精密に定式化し、
ホログラフィー原理と量子誤り訂正符号の関係を使って、
離散対称性と連続対称性の両方について証明を与えた。

また、ゲージ対称性がある時には、対称性の任意の規約表現にしたがう物理状態があるという**完全性定理**を証明した。

さらに、技術的な仮定の下で、**ゲージ対称性がコンパクト**であることを証明した。

arXiv:1810.05337 (5 page summary, Phys. Rev. Lett.)

arXiv:1810.05338 (175 page complete proof)

一般化されたネーター定理

対称性 G の任意の元 g と、コーシー面（初期条件を与える空間）の部分空間 $\mathcal{R}$ に対し、ユニタリー作用素が定義できる：

$$U(g, \mathcal{R})$$

この部分空間 $\mathcal{R}$ が、さらに小さな部分空間の排他的和集合のときには、上記のユニタリー作用素も分解できる：

$$U(g, \bigcup_i \mathcal{R}_i) = \prod_i U(g, \mathcal{R}_i)$$

この定理は離散対称性についても成り立つ

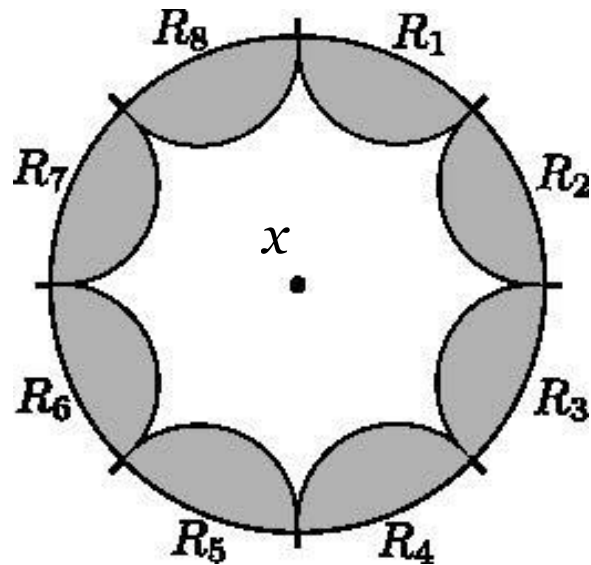
（連続対称性の場合には、通常のネーター定理の帰結）

量子重力理論はグローバル対称性を持たない

AdSの中の重力理論がグローバル対称性 G を持つと、
 G の忠実な表現にしたがう局所作用素が存在する。

量子重力理論はグローバル対称性を持たない

AdSの中の重力理論がグローバル対称性 G を持つと、
 G の忠実な表現にしたがう局所作用素が存在する。



しかし、ユニタリー作用素

$$U(g) = \prod_i U(g, \mathcal{R}_i)$$

は、AdSの中に置かれた局所作用素と

矛盾

コメント

量子重力理論はグローバル対称性を持たない。

対称性は破れるか、ゲージ化されている。

対称性がどのように破れるか / ゲージ化されるかはわからない。

ゲージ対称性の任意の有限次元ユニタリー表現は
物理的状态の中に実現される。

このような表現を担う粒子の質量はわからない。

もっと定量的な予言はできないか？

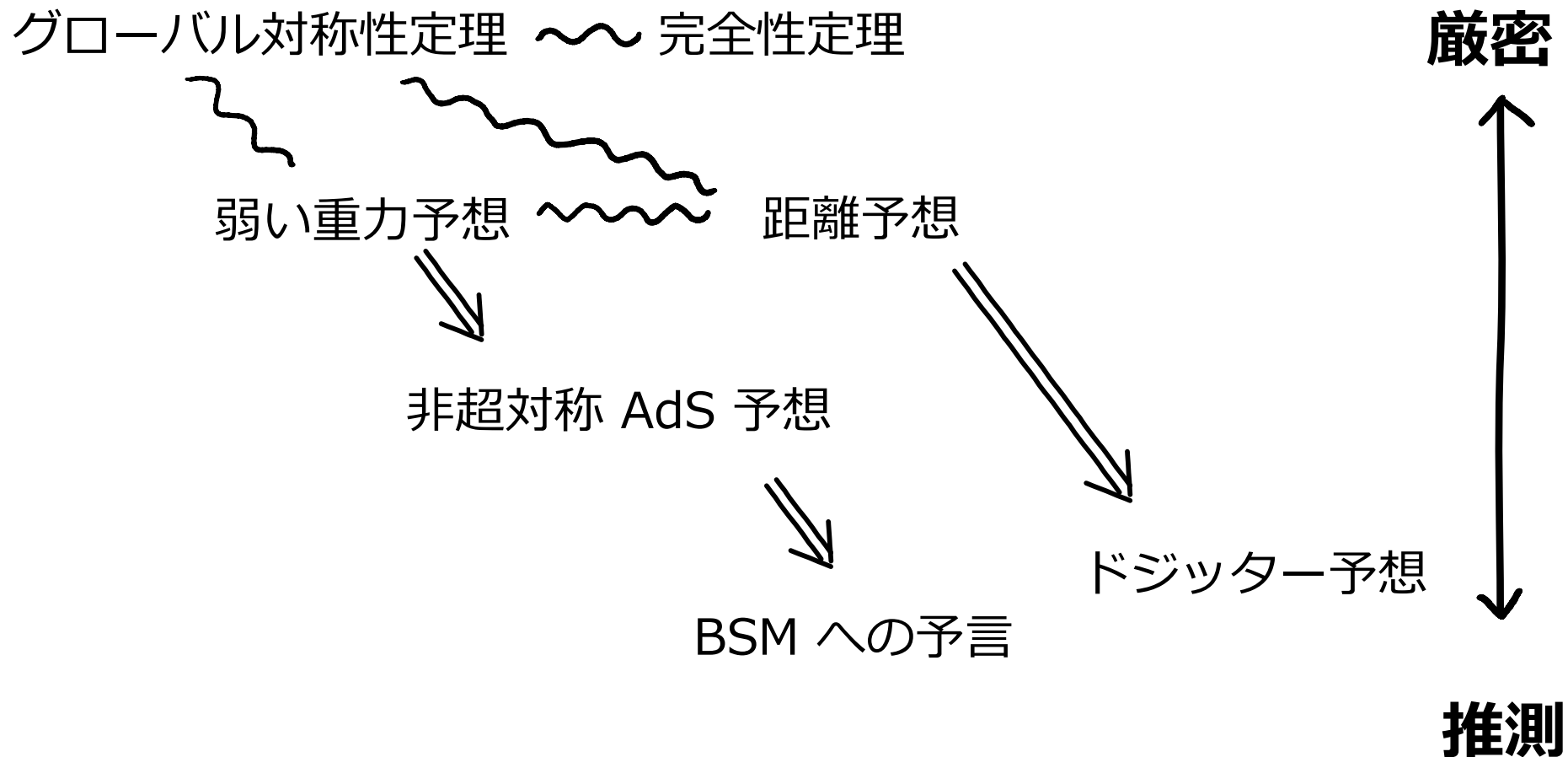
ここまでは、
理論的に証明できることを
お話ししてきました。

これから、
危険な予想の領域に入ります。



スワンプランド条件のランドスケープ

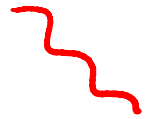
役にたたない ←————→ 役にたつ



スワンブランド条件のランドスケープ

役にたたない ←————→ 役にたつ

グローバル対称性定理 $\sim$ 完全性定理



弱い重力予想

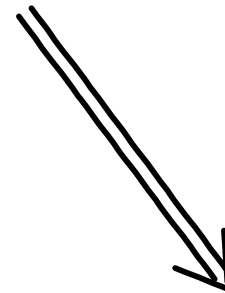


距離予想

非超対称 AdS 予想



BSM への予言



ドジッター予想

厳密



推測

弱い重力予想



グローバル対称性定理は、グローバル対称性が破れるか、ゲージ化されていることを示す。

しかし、**対称性がどのように破れるか / ゲージ化されるかはわからない。**

完全性定理は、ゲージ対称性の任意の有限次元ユニタリー表現が物理的状態の中に実現されることを保証する。

しかし、**このような表現を担う粒子の質量はわからない。**

弱い重力予想は、これを定量化する。

弱い重力予想

アインシュタインの重力理論、マックスウェル場（一般に長距離ゲージ場）と有限な数の物質場によって記述される低エネルギー理論は、整合性のある量子重力理論に昇華されるとすると、以下の不等式を満たす質量 m と電荷 Q を担う粒子を含まなければならない。

$$m \leq \frac{|Q|}{\sqrt{G}}, \quad G : \text{ニュートン定数}$$

Arkani-Hamed, Motl, Nicolis, Vafa: hep-th/0601001

$$\exists (m, Q) \text{ s.t. } m \leq \frac{|Q|}{\sqrt{G}}$$

予想の根拠：

- (1) ブラックホールを使った議論
- (2) これまで超弦理論から導かれたすべての
低エネルギー有効理論で成り立っている。
- (3) 宇宙検閲官仮説との関係

不等式から等号を削除したらどうなるかを考えた：

$$m < \frac{Q}{\sqrt{G}} \quad (\text{no "="}) \quad \text{unless BPS}.$$

Vafa + H.O.: 1610.1533

これを仮定すると、**AdS 時空間は超対称性を保たないと不安定**になることが導かれた。

実際、これまで超弦理論から構成された
非超対称 AdS で安定性が証明されているものはない。

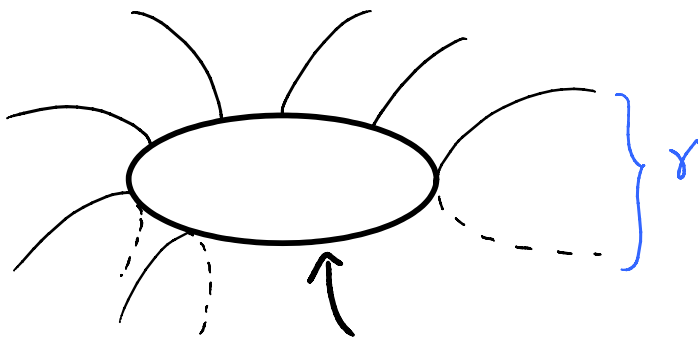
例：AdS5 x CP3 in M Theory:

Martin, Reall: 0810.2707

我々の予想から不安定性が期待できる。

Witten が発見したカルツァークライン・インスタントンの高次元化によって不安定性が証明できた。

Spodyneiko + H.O.: 1703.03105



内部空間の中の2次元球面が収縮し、**内側は空っぽ**。

この「空っぽ」が光の速さで膨張し、AdSを有限時間で食い尽くす。

素粒子の標準模型を超える理論についての仮定の下で、
非超対称 AdS の不安定性から、ニュートリノは
ディラック型で、質量に制限がつくことが導かれる。

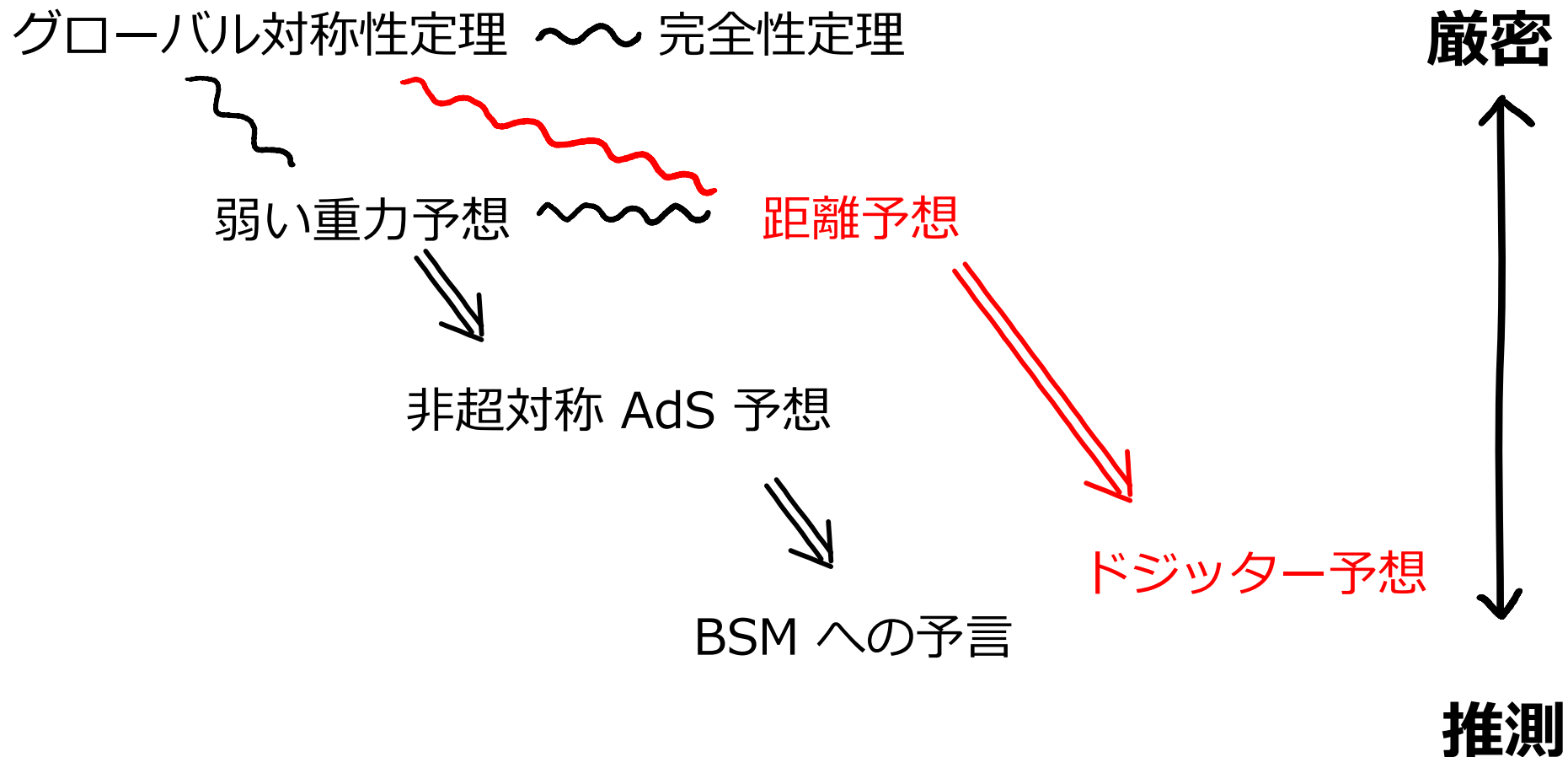
Vafa + H.O.: 1610.1533

$$(\text{ニュートリノの質量})^4 < (\text{ダークエネルギーの密度})$$

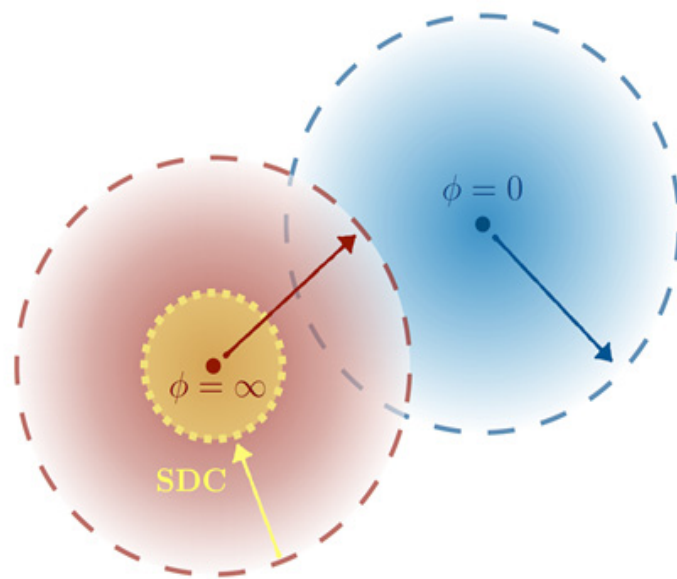
Ibanez, Martin-Lozano, Valenzuela: 1706.05392, 1707.05811;
Hamada, Shiu: 1707.06326;
Gonzalo, Herraez, Ibanez: 1803.08455

スワンプランド条件のランドスケープ

役にたたない ←————→ 役にたつ



距離予想



我々が証明したグローバル対称性定理は、
自発的に破れた対称性にも当てはまる。

初期宇宙のインフレーション模型にしばしば登場する
スカラー場のシフト対称性は破れることが導かれる。

では、シフト対称性はどのように破れるのか。

距離予想は、これを定量化する。

距離予想

超弦理論はパラメータのない理論であり、
すべてのパラメータは何らかのスカラー場の
期待値である。

距離予想は、こうしたスカラー場の値の空間
(モジュライ空間) の幾何学的性質に関する
予想である。

距離予想

1. モジュライ空間のある点から、いくらでも遠い点がある。
2. モジュライ空間の点 X から $d(X, Y) > T \gg M_p$ だけ離れた点 Y には、質量 $M_p \exp(-a T/M_p)$ の新しい粒子が現れる。
3. こうした新しい粒子のため、点 X での低エネルギー有効理論は、点 Y には使えない。
4. モジュライ空間の閉包は単連結である。

Vafa + HO: hep-th/0605264

距離予想

1. これまで超弦理論から導かれたすべての低エネルギー有効理論で成り立っている。
2. 弱い重力予想との関係。
3. 重力効果を消す（ニュートン定数をゼロにする）と成り立たない。
4. 初期宇宙のインフレーションモデルに制限を与える。

Vafa + HO: hep-th/0605264

ドジッター予想

距離予想をBoussoのエントロピー不等式と組み合わせると、
スカラー場のポテンシャル V に関し、

$$|\nabla V| \geq \frac{c}{M_P} V$$

もしくは

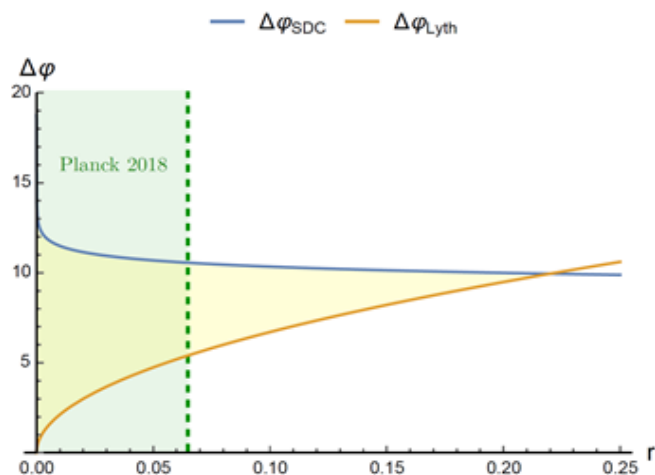
$$\min (\nabla_i \nabla_j V) \leq - \frac{c'}{M_P^2} V$$

が、漸近的に成り立つことが導かれる。

Obied, Spodyneiko, Vafa + H. O.: 1806.08362
Palti, Shiu, Vafa + H. O. :

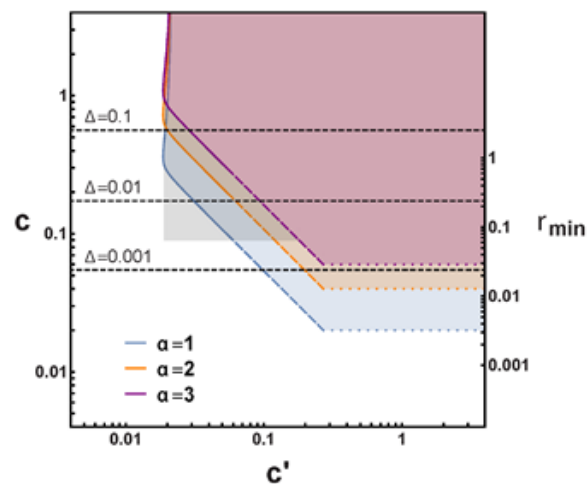
距離予想やドジッター予想は、初期宇宙のインフレーションモデルとは矛盾しないが、モデルに制限を与える。

距離予想



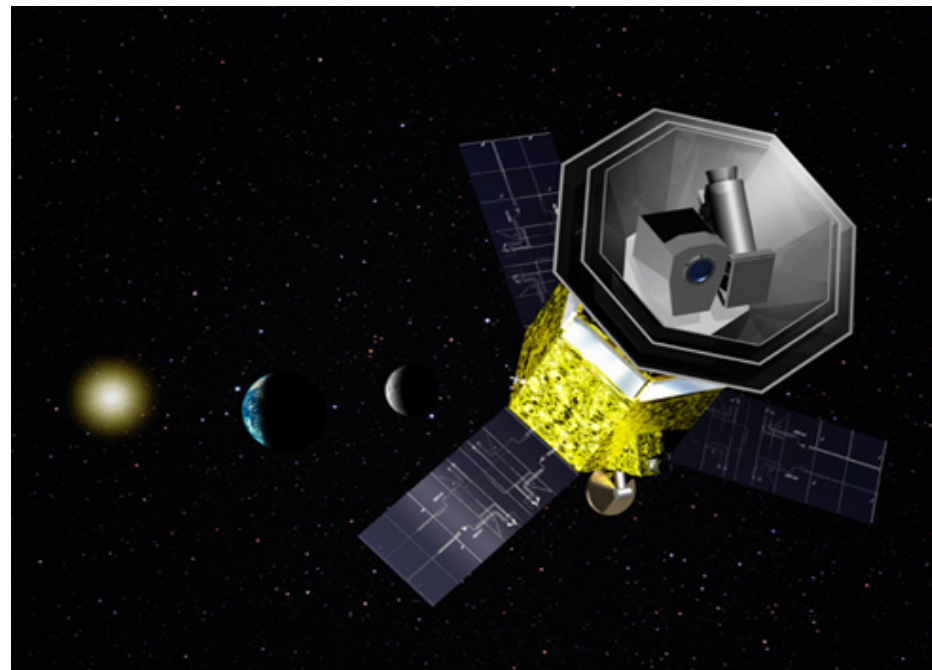
Scalisi, Valenzuela: 1812.07558

ドジッター予想

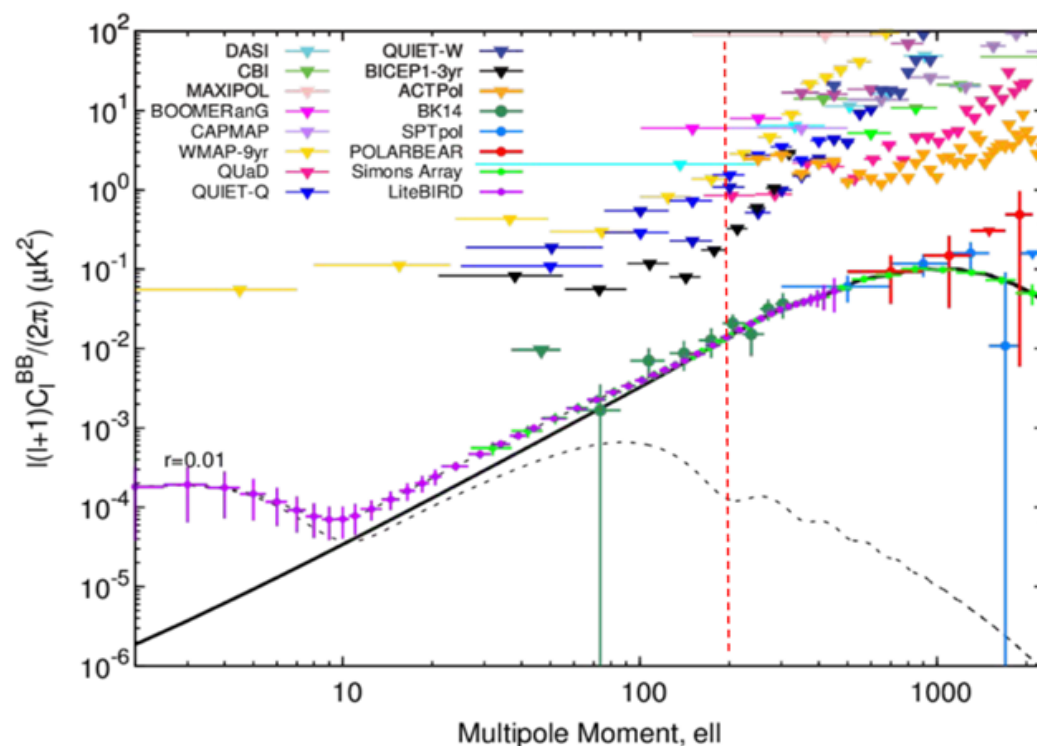


Chiang, Leedom, Murayama: 1811.01987

ISAS/JAXA は、宇宙背景マイクロ波放射の偏光を測定し、インフレーションモデルを検証することを目標とするLiteBIRD 衛星の8年後の打ち上げを決定した。

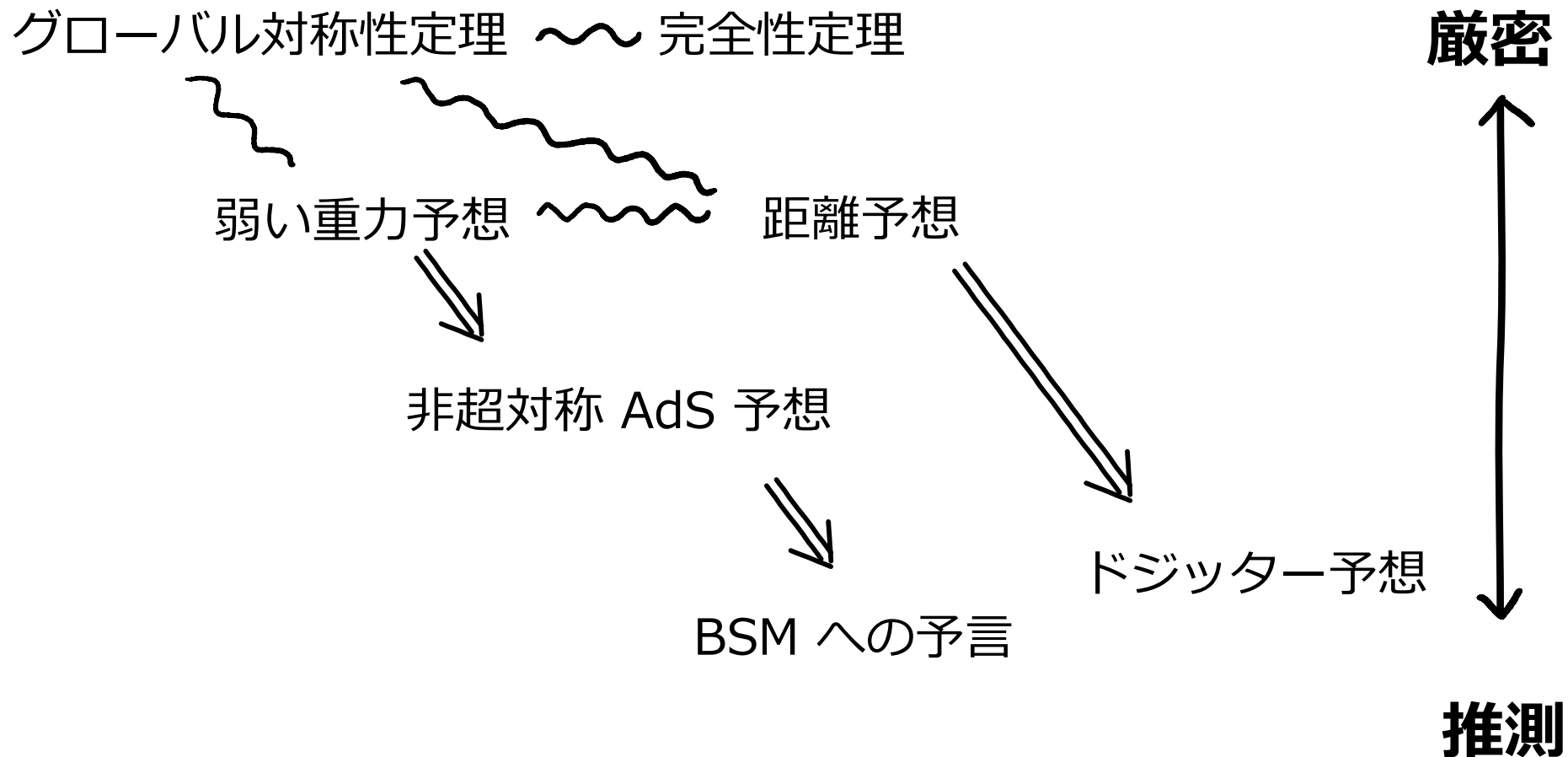


超弦理論の定量的予言能力を高めて、
8年後にLiteBIRD 衛星からのデータと
対峙したい。



スワンプランド条件のランドスケープ

役にたたない ←————→ 役にたつ



Gravity is Different

低エネルギー有効理論が、高エネルギーで
整合性のある理論に昇華できるとは限らない。

プランクスケールは彼方にあるが、理論の
整合性から低エネルギーへの思いがけない
予言が導けるかもしれない。